数理化自学丛书

代数

第四册

数理化自学丛书

代数

第四册

数理化自学丛书编委会
数学编写小组编

上海科学技术出版社

七八年九月十五日

数理化自学丛书

代　　数（第 四 册）

数理化自学丛书编委会
数 学 编 写 小 组 编

上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行　上海市印刷四厂印刷

开本 787×1092 1/32　印张 7.75　字数 170,000
1966 年 6 月第 1 版　1978 年 2 月第 2 次印刷

书　号：13119·716　　定价：0.49 元

内 容 提 要

本书是数理化自学丛书中的"代数"第四册. 在本丛书"代数"前三册的基础上,讲述初等代数的最后一部分内容. 全书共分六章,即:排列和组合、数学归纳法、二项式定理、复数、方程论初步、二阶和三阶行列式. 书中对于每一章节的难点和重点,皆予强调;配有丰富的例题和习题,并附提示和答案,以助读者深入理解和加强练习.

本书可供青年工人、在职干部、知识青年自学之用,也可供中等学校青年教师参考.

目　录

重印说明

第一章　排列和组合 …………1

§1·1　排列 ……………………1

§1·2　乘法原则 ………………4

§1·3　相异元素不许重复的排列 ……………………7

§1·4　全排列…………………10

§1·5　加法原则………………11

§1·6　相异元素可以重复的排列……………………17

§1·7　组合……………………20

§1·8　组合数公式……………22

§1·9　组合数的两个性质……28

§1·10　排列、组合综合应用题……………………33

*§1·11　概率……………………35

本章提要……………………39

复习题一……………………40

第二章　数学归纳法 …………42

§2·1　归纳推理和演绎推理…42

§2·2　数学归纳法……………45

§2·3　数学归纳法在证明不等式中的应用…………53

本章提要……………………57

复习题二……………………57

第三章　二项式定理 …………59

§3·1　杨辉三角形……………59

§3·2　二项式定理……………63

§3·3　二项展开式的通项公式……………………69

§3·4　二项展开式中系数间的关系…………………73

§3·5　$(a-b)^n$ 的展开式 ……77

§3·6　二项展开式里各项系数的和…………………79

§3·7　二项式定理在近似计算中的应用……………82

本章提要……………………85

复习题三……………………85

第四章　复数 ………………87

§4·1　数的概念的扩展………87

§4·2　复数的概念……………89

§4·3　复数与平面内点之间的对应…………………94

§4·4　复数与平面内向量之间的对应………………99

§4·5　复数的加法和减法 …107

§4·6　复数的乘法 …………113

§4·7　复数的除法 …………119

§4·8　复数的乘方 …………122

§4·9　复数的开方 …………128

本章提要 ……………………134

复习题四 ……………………135

第五章　方程论初步 ………139

§5·1　多项式 $f(x)$ 的一些重要性质 ……………139

§5.2　综合除法 ……………153

§5·3　一元 n 次方程 ………159

§5·4　实系数一元 n 次方程 ……………………168

§5·5 有理系数一元 n 次方程 ……172
§5·6 几种特殊类型的高次方程的解法 ……181
本章提要 ……191
复习题五 ……193
第六章 二阶和三阶行列式 …196
§6·1 二阶行列式与二元一次方程组 ……196
§6·2 三阶行列式 …… 203
§6·3 子行列式和代数余子式 …… 209
§6·4 三元一次方程组 ……213
本章提要 ……221
复习题六 ……223
总复习题 ……226
习题答案 ……231

第一章　排列和组合

排列和组合是初等代数中的一段独特的内容，是数学里的重要基础知识之一．它对我们解决许多实际问题，以及进一步学习某些数学知识(如概率、二项式定理、行列式等等)，都有着重要的应用．

本章将在阐明排列和组合的意义的基础上，着重学习几种基本的、常用的排列和组合问题的解法．

§1·1　排　　列

让我们来看下面这几个问题．

问题1．用红、黄、蓝三种颜色的小旗，按不同的顺序升上旗竿，用以作出信号．在每个信号里，如果要求这三面小旗都要用到，那末单凭这三面小旗可以作出哪几种不同的信号？

【解】　在这三面小旗中，先取定一面(例如红旗)升上旗竿，这时，第二面旗子就只能在余下的两面中任取一面(要末是黄旗，要末是蓝旗)，第三面旗子就只能用剩下的最后一面旗了．这样就可以作出2种不同的信号：

$$\text{红}\left\langle\begin{array}{l}\text{黄——蓝}\\ \text{蓝——黄}\end{array}\right..$$

如果第一面旗是取定黄旗或者蓝旗，和上面的讨论一样，可以分别作出2种不同的信号：

$$\text{黄}\left\langle\begin{array}{l}\text{红——蓝}\\ \text{蓝——红}\end{array}\right.;\qquad \text{蓝}\left\langle\begin{array}{l}\text{红——黄}\\ \text{黄——红}\end{array}\right..$$

很明显，上面作出的这6种信号是各不相同的，并且，除这6种信号外，不可能再作出其他不同的信号了．由此，我们就找到了这个问题的答案：可以作出上面列举的这6种不同信号．

问题2． 由数字1、2、3，可以组成：

(1) 多少个没有重复数字的二位数？

(2) 多少个二位数？

【解】 (1) 我们可以按照先选十位上数字再选个位上数字的顺序，把各个不同的二位数一起列举出来：

$$1\begin{cases}2\\3\end{cases};\qquad 2\begin{cases}1\\3\end{cases};\qquad 3\begin{cases}1\\2\end{cases}.$$

由此可知，总共可组成6个不同的二位数．

(2) 对于一般的二位数，两个数位上的数字未必不同，因此，当我们选定了一个数字做十位上的数字以后，个位上的数字仍旧可以在这三个数字中任选，所以把这三个数字所组成的二位数一起列举出来便是：

$$1\begin{cases}1\\2\\3\end{cases};\qquad 2\begin{cases}1\\2\\3\end{cases};\qquad 3\begin{cases}1\\2\\3\end{cases}.$$

由此可知，总共可组成9个不同的二位数．

上面所提出的这两个问题，有着一个共同的特点，它们都可以看成是：从一些元素（旗子、数字）中，每次取出几个元素，按照一定的顺序摆成一排的问题．

从m个元素中，每次取出n个元素，按照一定的顺序摆成一排，*称为*__从m个元素里每次取出n个元素的排列__．

注意 根据上面这个排列的定义，所给的这m个元素和取出的n个元素，都不要求各不相同．本书只讨论下面这两种排列：

(1) 从 m 个各不相同的元素里，每次取出 n 个各不相同的元素的排列[如上面的问题 1 和问题 2 中的(1)都属于这一类型]，以后把这类排列简称为相异元素不许重复的排列.

(2) 从 m 个各不相同的元素里，每次取出 n 个元素(可以重复)的排列[如问题 2 中的(2)就属于这一类型]，以后把这类排列简称为相异元素可重复的排列.

在考虑排列问题时，常常把所给的元素顺次编上号码，用符号 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 来代表. 当元素不多时，还可以简单地用字母 $a, b, c, d, \cdots$；或者用数字 0, 1, 2, …, 9 来表示. 熟练地解这类符号、字母或者数字的排列问题，可以帮助我们掌握解排列问题的基本方法，提高解题能力. 在下面的例题和习题里，列入这类问题的目的就在于此.

例 写出从四个字母 a, b, c, d 中每次取出 2 个字母的所有不同排列，并要求：

(1) 不许重复； (2) 可以重复，

这种排列各有几个？

【解】 (1)
$$\begin{array}{llll} ab, & ba, & ca, & da, \\ ac, & bc, & cb, & db, \\ ad, & bd, & cd, & dc. \end{array}$$

这样的排列有 12 种.

(2)
$$\begin{array}{llll} aa, & ba, & ca, & da, \\ ab, & bb, & cb, & db, \\ ac, & bc, & cc, & dc, \\ ad, & bd, & cd, & dd. \end{array}$$

这样的排列共有 16 种.

从上面的例子中可以看到，如果两个排列里所含的元素不完全一样，例如 ab 和 ac，就是不同的排列；如果所含的元素完全一样，而排列的顺序不同，例如 ab 和 ba，那末也是不

同的排列.

习 题 1·1

1. 由 1、2、3、4、5 这五个数字所组成的二位数一共有几个？其中不含重复数字的有几个？

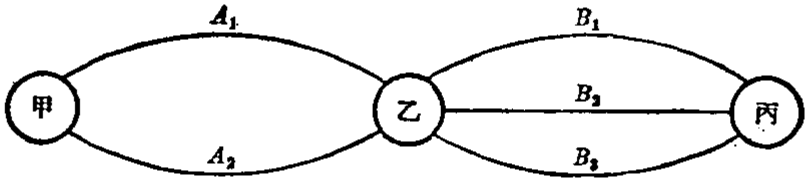
2. 用红色的、黄色的、蓝色的小旗各一面升上旗竿，以作出信号. 总共可作出多少种不同的信号？

[提示：作信号时，可以只用一面小旗升上旗竿，也可以用二面或者三面小旗按不同顺序升上旗竿.]

§1·2 乘法原则

对排列问题的研究，主要是求出根据已知条件所作出的不同排列的种数. 对于一些简单的问题，可以采用上节例题中的方法，把所有不同的排列列举出来，数出种数找到答案. 显然，这种方法是很烦的. 为了能找寻出一个简单的、直接的求排列种数的方法，下面先来考察一个具体问题.

问题 如果从甲地到乙地有 2 条路可走，乙地到丙地又有 3 条路可走，试问：从甲地经乙地而到丙地，可以有几种不同的走法？



【解】 如果用 A_1、A_2 表示从甲地到乙地的两条路，用 B_1, B_2, B_3 表示从乙地到丙地的这三条路（上图），从图中可以看出，从甲地经乙地到丙地，有并且只有下面这 6 种走法：

$$A_1——B_1,\quad A_1——B_2,\quad A_1——B_3,$$
$$A_2——B_1,\quad A_2——B_2,\quad A_2——B_3.$$

可以看出，解这个问题需要考虑两个步骤：第一步，先从由甲地到乙地的这两条路中任意选择一条(有 2 种选法)；第二步，再从乙地到丙地这三条路中任意选择一条(有 3 种选法)；而最后计算出来的不同走法的种数 6，正就是这两个步骤中每一步骤的选法种数(2 与 3)的乘积.

对这个具体问题的解，给了我们一个重要的启示：倘使撇开了这里所说的"从甲地到乙地"、"从乙地到丙地"这些具体内容，而把它们一般地看成是要完成一件事的两个步骤，并且把这里所说的"2 条路"、"3 条路"一般地叙述成"有 m_1 个方法"、"有 m_2 个方法"，这样，就可以作出如下的结论：

设完成第一件事有 m_1 个方法，在完成第一件事以后再完成第二件事又有 m_2 个方法；那末，依次完成这两件事，就有

$$N = m_1 \cdot m_2$$

个方法.

更一般地，我们还可以作出这样的结论：

设完成第一件事有 m_1 个方法，在完成第一件事以后再完成第二件事又有 m_2 个方法，在完成这二件事以后再完成第三件事又有 m_3 个方法……，在完成了前 $n-1$ 件事以后再完成第 n 件事又有 m_n 种方法；那末，依次完成这 n 件事，就有

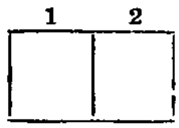
$$\boldsymbol{N = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdots m_n}$$

个方法.

在上面这个式子里，等号右边是乘积的形式，为了突出这一点，我们把上面这个结论称为**乘法原则**.

应用这个原则，就可以不通过具体作出排列，而求出符合题设条件的所有的不同排列的种数.

例如，对§1·1例题中的(1)所作的排列，可以看成是在排好顺序的两个位置



上，从 a, b, c, d 这四个字母里，选取字母去分别占据，因此可以认为这是要依次完成下面两件事：

(1) 先在 a, b, c, d 这四个字母中选取1个，去占据第1号位置；

(2) 再在余下的3个字母(因为排列里不许有重复字母，所以已经占有第1号位置的那个字母不能再选)中选取1个去占据第2号位置.

因为，完成第一件事有4个方法，完成第二件事有3个方法，所以完成这两件事共有

$$N=4\cdot 3=12$$

个方法.

类似地，读者可以自己来说明上节例题里(2)所求的排列种数是

$$N=4\cdot 4=16.$$

习　题　1·2

应用乘法原则解下列各题：

1. 从 a, b, c, d, e 这5个字母里，每次取出：

(1) 2个；　(2) 3个；　(3) 4个；　(4) 5个

不同字母，求所组成的各种不同排列的种数.

[解法举例：(1) $N_2=5\cdot 4=20$.]

注意　本题的四个小题目都是要求排列的种数 N，为便于区别，我们用 N_2 表示选取2个字母的排列种数，N_3，N_4，N_5 便分别表示选取3，4，5个字母的排列种数.

2. 用数字 1, 2, 3, 4 可以组成多少个:

(1) 二位数? (2) 三位数? (3) 四位数?

其中不含有重复数字的各有几个?

3. (1) 从 9 块不同颜色的积木里, 取出三块排成一横排, 共有多少种不同排法?

(2) 在所有的三位数里,共有几个不含有数字 0 的?

比较一下,(1)和(2)有什么区别.

§1·3 相异元素不许重复的排列

在习题 1·2 第 1 题里, 读者已经计算过: 从 a, b, c, d, e 这 5 个字母里, 每次取出 2 个、3 个、4 个、5 个不同字母, 所组成的各种不同排列的种数分别是:

$$N_2=5\cdot4=20,$$
$$N_3=5\cdot4\cdot3=60,$$
$$N_4=5\cdot4\cdot3\cdot2=120,$$
$$N_5=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120.$$

观察上面这些式子,可以看出:所求的排列种数是若干个连续自然数的乘积, 乘积中最大的一个因数就是所给元素的个数,乘积中因数的个数等于排列中含有的元素的个数.

为了统一起来,有时也把这 5 个字母里只取出 1 个,说成是这 5 个不同字母中取出 1 个字母的排列. 很明显, 这样作出的排列的种数是

$$N_1=5.$$

把上面这个问题推广到一般的情况,就可以得出结论:

从 m 个不同元素里,每次取出:

1 个元素的所有排列的种数是 m;

2 个不同元素的所有排列的种数是 $m(m-1)$;

3 个不同元素的所有排列的种数是 $m(m-1)(m-2)$；

4 个不同元素的所有排列的种数是

$$m(m-1)(m-2)(m-3);$$

…………………………………………………………

n 个 $(1\leqslant n\leqslant m)$ 不同元素的所有排列的种数是

$$m(m-1)(m-2)\cdots[m-(n-1)],$$

就是

$$m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1).$$

上面这种排列是 m 个各不相同元素中每次取 n 个各不相同元素的排列，我们用符号 A_m^n 表示这类排列里所有不同排列的种数．于是，

$$\boldsymbol{A_m^n=m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}.$$

这个公式称为**排列数公式**．这里 m, n 都表示自然数，且 $n\leqslant m$.

把这公式写成定理形式，即是：

定理 从 m 个不同元素里每次取出 n 个不同元素的所有排列的种数，等于 n 个连续自然数的乘积，其中最大的一个数是 m.

为了以后解排列问题的需要，下面先来熟悉一些关于排列数的运算．

例 1. 计算 $\dfrac{A_{16}^3}{2A_8^4}$ 的值．

【解】 $\dfrac{A_{16}^3}{2A_8^4}=\dfrac{16\cdot15\cdot14}{2\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5}=\dfrac{16\cdot15\cdot14}{16\cdot14\cdot15}=1.$

例 2. 计算 $\dfrac{A_9^5+A_9^4}{A_9^3}$ 的值．

【解】 $\dfrac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5+9\cdot8\cdot7\cdot6}{9\cdot8\cdot7}=\dfrac{9\cdot8\cdot7\cdot6(5+1)}{9\cdot8\cdot7}=36.$

习　题　1·3(1)

1. 计算以下各式的值:

(1) A_6^3;　　(2) A_{10}^4;

(3) $\frac{A_{12}^8}{A_{12}^7}$;　　(4) $\frac{3A_{20}^{19}}{2A_{20}^{18}}$.

2. 计算以下各式的值:

(1) $\frac{A_8^3-A_8^2}{A_4^3}$;　　(2) $\frac{A_{10}^5+A_{10}^4}{A_{12}^6-A_{12}^5}$;

(3) $\frac{4A_5^2}{A_2^2+A_3^2+A_4^2}$;　　(4) $\frac{A_7^6}{A_8^3\cdot A_3^2}$.

应用上面的公式，可以很简便地解答一些关于相异元素的不许重复的排列问题.但在应用这公式时,必须先考察两点:

(1) 所给的元素是不是各不相同的?

(2) 在作出的排列里,元素是不是各不相同的?

下面举例来说明这类问题的解法.

例 3. 某铁路线上一共有 48 个大小车站,铁路局要为这条路线上准备几种不同车票?

【解】 因为每张车票都标明起点站和终点站的站名，所以同样的两站间就有 2 种不同的车票. 从 48 个车站的站名中取出两个车站名,分起点站和终点站排起来,所有这种排列的种数即是本题的解,所以这是求在 48 个不同元素中每次取 2 个不同元素的所有排列的种数问题. 于是，由上面的定理即得,需要准备的车票种数是

$$A_{48}^2=48\cdot 47=2256.$$

答: 要准备 2256 种不同的车票.

注意 在解排列的具体问题时,解答中要作简要的说明，不宜只列出一个算式;在以后解组合问题时也一样.

习 题 1·3(2)

1. 用1、2、3、4、5、6这6个数字，可以组成多少个没有重复数字的

(1) 三位数； (2) 四位数.

2. 有颜色不同的小旗5面，现在要取出3面顺次升入旗竿作出信号，问可以构成多少种不同的信号？

3. 有5本不同的书，要分别包上包书纸. 现有花色不同的包书纸6张，问有几种不同的包法？

4. 有甲、乙、丙、丁、戊5个队进行乒乓球比赛，如果每个队都要与另一队在本队的场子里以及客队的场子里各比赛一次，问这次比赛总共要进行多少场次？

§1·4 全 排 列

在公式

$$A_m^n=m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+2)(m-n+1)$$

中，如果令 $n=m$，就得

$$A_m^m=m(m-1)(m-2)\cdots 2\cdot 1.$$

这个公式指出：把 m 个不同的元素全部取出来作排列，所有这样的排列的种数，等于从1开始的 m 个连续自然数的连乘积.

这种排列称为 **m 个不同元素的全排列**，并且用专门的符号 P_m 来表示这类排列所有的排列种数，就是

$$\boldsymbol{P_m=A_m^m=1\cdot 2\cdots(m-1)\cdot m.}$$

为了方便起见，把从1开始的 m 个自然数的连乘积，用记号 $m!$（读做 m 阶乘）来表示. 应用这一记法，m 个不同元素的全排列的种数公式就可以写成

$$\boldsymbol{P_m=m!.}$$

例 1. 计算 $\dfrac{8!-6!}{7!-6!}$ 的值.

分析 $8!=8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=(8\cdot7)\times6!$,

$7!=7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=7\times6!$,

所以分子分母中都含有因数 6!, 可以先约去 6! 后再计算.

【解】 $$\frac{8!-6!}{7!-6!}=\frac{(8\cdot7)\times6!-6!}{7\times6!-6!}=\frac{55\times6!}{6\times6!}$$
$$=\frac{55}{6}=9\frac{1}{6}.$$

注 $$(n+1)!=(n+1)\cdot n!$$
$$=(n+1)\cdot n\cdot(n-1)!$$
$$=\cdots\cdots$$

这种变换在计算中很有用, 应该熟悉这些计算技巧.

例 2. 求证 $P_{n+1}-P_n=nP_n$.

【证】 $$P_{n+1}-P_n=(n+1)!-n!=(n+1)\cdot n!-n!$$
$$=(n+1-1)\cdot n!$$
$$=n\cdot n!=n\cdot P_n,$$

命题得证.

习 题 1·4

1. 计算:

(1) $\dfrac{P_{10}-9P_9-8P_8}{P_8}$;　　(2) $\dfrac{P_{10}}{P_6\cdot P_4}$.

2. 求证:

(1) $P_8-8P_7+7P_6=P_7$;　　(2) $16P_3=P_5-P_4$.

3. 把编上号码的 5 台车床排成一列, 共有几种不同的排法?

§1·5 加法原则

在习题 1·1 里, 我们曾经解过下面这个问题:

问题 用红色的、黄色的、蓝色的小旗各一面升上旗竿，以作出信号，总共可作出多少种不同的信号？

解这个问题时，我们是这样考虑的：

作出的信号可以按照用到的小旗的面数分成三大类，即

(1) 只用一面小旗的，这样作出的信号有 $A_3^1=3$ 种；

(2) 用二面小旗的，这样作出的信号有 $A_3^2=6$ 种；

(3) 三面小旗都用的，这样作出的信号有 $A_3^3=6$ 种.

因为上面这三类信号都不相同，并且除此之外不再有其他不同的信号可作，因此总共可作出的不同信号，应该是这三类方法所作出的各种信号的和，由此得

$$N=3+6+6=15\ (\text{种}).$$

象乘法原则一样，从这个问题的解答中，可以启发我们作出如下的一般结论：

设完成一件事有 n 类方法，只要选择任何一类方法中的一种方法，这件事就可以完成．如果已知其中第一类方法有 m_1 种，第二类方法有 m_2 种……，第 n 类方法有 m_n 种，并且这 $m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种方法里，任何两种方法都不相同，那末完成这件事就有

$$\boldsymbol{N=m_1+m_2+\cdots+m_n}$$

种方法.

在上面这个式子里，等号右边是和的形式，为了突出这一点，我们把这一结论称为**加法原则**.

在解一些比较复杂的排列问题时，常常要用到加法原则和§1·2里提出的乘法原则，下面举例来说明.

例 1. 用 0、1、2、3 这 4 个数字，可以组成多少个没有重复数字的四位数.

分析 因为四位数的千位上的数字不能是 0，为了这一点，我们把

这个四位数分成两步来排：先排千位上的数字，它可以在1、2、3这三个数字中任意选用一个；再排其他三个数位上的，它们可以选用余下的3个数字. 因为只有当这两个步骤都完成后这个四位数才能排好，所以要用乘法原则.

【解】 千位上数字的排法有 A_3^1 种；

其他三个数位上数字的排法有 P_3 种.

所以，总共的排法有

$$N=A_3^1\cdot P_3=3\cdot6=18(\text{种}).$$

答：可以排成18个不同的四位数.

这个问题还可用另一种方法来解.

(1) 四个数字0、1、2、3全部取来排列，共有排法 P_4 种.

(2) 其中0被排在千位上的排列有 P_3 种(这是因为：0在千位上的排列，实际上就是1、2、3在个、十、百位上的排列，而后者有 P_3 种). 这些排列不能看成是四位数.

(3) 所以，所求的种数应该是两者的差，即

$$P_4-P_3=24-6=18.$$

由此可知，总共可排成18个不同的四位数.

上面这种考虑，事实上是应用了加法原则，

$$\because\quad N=n_1+n_2,$$

其中 N 表示四个数字的全排列数，n_1 是0被排在千位上的排列数，n_2 是0不在千位上的排列数，

$$\therefore\quad n_2=N-n_1.$$

注意 对于一些带有特殊条件的排列，如果不合条件的情况计算比较简单，在解题过程中，常常象这一解法一样，先不考虑这个特殊条件，把所有的排列种数 N 求出，然后再减去不适合这一特殊条件的排列种数 n_1，从而得出解答.

例2. 6个队员排成一列进行操练，其中新队员甲不能站在排首，也不能站在排尾，问有几种不同排法？

下面将用两种方法来解这个问题．先运用加法原则来解，可以这样考虑：倘使对新队员甲的排法没有限制条件，那末共有排法 P_6 种；在这些排列里，可以分成 3 类情况：

(1) 甲在排首的(有 P_5 种排法)，

(2) 甲在排尾的(有 P_5 种排法)，

(3) 甲不在排首或排尾的．

前 2 种情况都不符合题设条件，把总共的排列种数里减去这两种情况的排列种数，即得符合条件的排列种数．

【解 1】 6 人的全排列种数是 P_6．甲在排首或在排尾的排列种数都是 P_5．所以，甲不在排首也不在排尾的排列种数是

$$P_6-2P_5=(6-2)P_5=4\times120=480.$$

现在再运用乘法原则来解，可以这样考虑：要使甲既不在排首也不在排尾，可以先让甲在中间 4 个位置上任意找一个位置站好(有 A_4^1 种排法)，然后，对其余的 5 人，再在另外 5 个位置上作全排列(有 P_5 种排法)．这两个步骤依次完成，排列就完成．所以，所求的排列的种数是 A_4^1 与 P_5 的积．

【解 2】 甲可以排在除去首、尾这两个位置以外的 4 个位置上，共有 A_4^1 种排法．其余 5 人可在另外 5 个位置上排列，共有 P_5 种排法．所以，总共的排法有

$$A_4^1\cdot P_5=4P_5=480(\text{种}).$$

答：有 480 种不同的排法．

从上面这两个例子中可以看到，解排列应用题时，由于思考方法不同，同一问题可以有几种不同的解法，但求出的结果总是一样的．在解题时，建议读者不仅考虑一种解法，同时也考虑一下有没有其他解法．这样做，一方面可以培养解题能力，同时也可以从两种不同解法的结果是否相同来检验作出的解答有没有错误．

习　题　1·5(1)

1．用数字1、2、3、4、5，可以组成多少个没有重复数字的自然数？

[提示：组成的自然数里包括一位数，二位数……，五位数.]

2．5件不同的商品，陈列在橱窗内，将它们排成一列.

(1) 如果某一件商品必须放在中间，问有几种排法？

(2) 如果某一件商品不放在中间，问有几种排法？

(3) 如果某一件商品不放在中间，也不放在两端，问有几种排法？

3．6件不同的商品，陈列在橱窗内，将它们排成一列.

(1) 如果甲乙两种商品要分别放在两端，问有几种排法？

(2) 如果甲乙两种商品都不放在两端，问有几种排法？

(3) 如果甲乙两种商品要放在相邻的位置，问有几种排法？

(4) 如果甲乙两种商品，不能放在相邻的位置，问有几种排法？

[提示：(3)要使甲乙两种商品放在相邻位置，可以把它们两个先排定(注意这是两者之间的全排列)，然后把它们看成一个整体再与其他4件商品作排列.]

4．在3、5、7、9、11、13这6个数中，任取1个做分子，1个做分母，可以组成多少个不同的分数？其中真分数、假分数各有几个？

下面再举一些带有条件的数字排列问题，研究一下它们的解法.

例3.　在3000到8000之间，有多少个没有重复数字的、且能被5整除的奇数.

分析　适合题意的数，要具有以下的条件：

(1) 个位上必须是5；

(2) 千位上必须是3、4、6、7中之一(5已用过，所以不能再用)；

(3) 百位上、十位上可以是除去已排掉的2个数字以外的8个数字中的任何2个.

由此，本题可以按照以上条件分步来排.

【解】　适合题意的数：

(1) 个位上必须是5，只有1种排法；

(2) 千位上可以是3、4、6、7中之一，共有 A_4^1 种排法；

(3) 百位和十位上，可以把其余8个数字作排列，共有 A_8^2 种排法.

所以，适合题意的数共有

$$A_4^1 \cdot A_8^2 = 4 \times 8 \times 7 = 224(\text{个}).$$

从这个例子的解答中可以看到，对一个带有条件的排列问题，如果把排列划分成几个步骤来排，那末应该把有条件的位置先排好，再排其余的位置.

例4. 在3000和8000之间，有多少个没有重复数字的奇数.

分析 适合题意的数，要具有以下的条件：

(1) 个位上必须是1、3、5、7、9中之一；

(2) 千位上必须是3、4、5、6、7中之一；

(3) 其他两位上可以是除去已排了的2个数字以外的8个数字中的任意两个.

在条件(1)与(2)中，3、5、7这3个数字重复，因此还不能直接作分步排列. 为了避免重复，把千位上的数字再分成两类：

(i) 千位上是4、6中之一，这时个位上就可以是1、3、5、7、9中之一；

(ii) 千位上是3、5、7中之一，这时个位上就可以是1、3、5、7、9这5个数字中除去已排了的1个数字以外的4个数字中的任意一个.

由此，本题可以先分成两种情况，求出每一情况的所有排列的种数后，再相加而得.

【解】 适合题意的数，按千位上的数字是偶数或奇数而分成两类：

(1) 千位上是偶数. 它可以在4、6中任取1个，有 A_2^1 种排法. 这时，个位上有 A_5^1 种排法，其他两个数位上有 A_8^2 种排法，所以这一类的数有

$$A_2^1 \cdot A_5^1 \cdot A_8^2\ (\text{个}).$$

(2) 千位上是奇数. 它可以从3、5、7中任取1个，有 A_3^1 种排法. 这时，个位上只有 A_4^1 种排法，其他两个数位上仍有 A_8^2 种排法，所以这一类的数有

$$A_3^1\cdot A_4^1\cdot A_8^2(\text{个}).$$

由(1)和(2)可知，总共可排成适合题意的数有

$$\begin{aligned}&A_2^1\cdot A_5^1\cdot A_8^2+A_3^1\cdot A_4^1\cdot A_8^2\\&=(10+12)\times8\times7\\&=1232(\text{个}).\end{aligned}$$

注意 在解本题时，如果不把千位上数字的情况先划分，从个位上有 A_5^1 种排法，千位上有 A_5^1 种排法，其他两个数位上有 A_8^2 种排法，直接得出共有

$$A_5^1\cdot A_5^1\cdot A_8^2=25\times8\times7=1400$$

种不同的排法，那末就错了. 这是因为，这里包括着一类千位上和个位上数字相同的数(如: 3453)，它们是不符合题意的. 在解题时思考必须慎密，既要防止遗漏，也要防止重复.

习　题　1·5(2)

1. 用0、1、2、3、4、5这6个数字，可以组成多少个没有重复数字的:

(1) 三位数?　　(2) 能被5整除的三位数?

(3) 三位偶数?　　(4) 三位奇数?

2. 用数字2、3、4、5、6、7组成的没有重复数字的六位数里:

(1) 能被25整除的有几个?　　(2) 能被6整除的有几个?

[提示: 能被25整除的数，末两位必须是00、25、50、75.]

3. 求证: 用1、2、3、4、5、6这6个数字所组成的没有重复数字的六位数里，1不在第一位、6不在第六位的共有 $6!-2\cdot5!+4!$ 个.

§1·6　相异元素可以重复的排列

在§1·1的问题2的(2)里，曾经计算过: 用1、2、3这3

个数字所组成的二位数共有9个，这个结果很容易应用乘法原则来说明．事实上，这个二位数可以分成两步来排．第1步排十位上的，显然有3种排法；第2步排个位上的，因为数字可以重复，所以仍有3种排法．由此得到总共有

$$3\times3=3^2=9$$

种排法．

这类问题称为相异元素可以重复的排列问题．应用乘法原则，很容易推出：

m个不同元素里，如果每个元素都可以重复选取，那末取n个元素的所有排列的种数是

$$\boldsymbol{N=m^n}.$$

这里m、n都是自然数．

在解相异元素可以重复的排列问题时，根据题意正确地判断哪一个数应该作为底数m，哪一个数作为指数n，是解题的一个重要关键．举例说明如下：

例1． (1) 3个零件，被分配到4架车床上加工，共有几种不同的分配方法？

(2) 3个学生争取参加4项公益劳动，共有几种不同的分配方法？

【解】 (1) 因为每一零件都可以分配给4架车床的任一架来加工，都有4种分配方法，所以有

$$N=4\times4\times4=4^3=64$$

种分配方法．

(2) 因为每1项公益劳动都可能被3个同学中的任何一个争取到，都有3种分配方法，所以有

$$N=3\times3\times3\times3=3^4=81$$

种分配方法．

从这个例子可以看出，(1)和(2)都是相异元素可以重复的排列问题，但是前者要以车床的架数4作为底数，后者则要以学生人数3作底数．在解题时，首先把题意仔细分析清楚，判断出应该以哪一个为主来考虑分配[例如在(1)中，以零件为主考虑分配的方法；在(2)中，以公益劳动为主考虑分配的方法]，直接应用乘法原则来解就可以防止发生错误．

因为在相异元素的排列问题里，根据题意选出的元素有的不许重复，有的允许重复，因此，在解题时要正确地判断选出的元素是否可以重复，这是解题时应该加以注意的．

例2．7个运动员争取参加3项比赛，且每种比赛只派1个运动员参加：

(1) 如果每人最多只能参加1个项目，有几种分配方法？

(2) 如果每人可以参加1项、2项、3项比赛，或者1项比赛也不参加，有几种分配方法？

分析 (1) 因为每人最多只能参加1个项目，所以参加第1项比赛有7种分配法，参加第2项比赛便只有6种分配法，参加第3项比赛便只有5种分配法．这是7个相异元素中取3个元素的不许重复的排列问题．

(2) 因为每个比赛项目都可以让这7人中的任一人参加，都有7种分配方法，所以这是7个元素中取3个元素允许重复的排列问题．

【解】 (1) 分配方法有 $A_7^3=7\times6\times5=210$ 种；

(2) 分配方法有 $7\times7\times7=343$ 种．

习 题 1·6

1．有7个体操运动员，同时参加4项体操比赛，分项冠军的获得者有几种可能？

2．某城市的电话号码原来有5个数码，以后改成了6个数码．这样改变以后，可以增加多少个用户(如果规定电话号码中第1个数字不

用 0)?

3．用 0、1、2、…、9 这 10 个数字，可以组成多少个不同的三位数？在这些三位数中：

(1) 没有重复数字的有几个？

(2) 三个数字都重复的有几个？

(3) 只有两个重复数字的有几个？

4．有 5 本不同的书，准备送给 3 个小朋友：

(1) 如果每人只能得 1 本，有几种送法？

(2) 如果这 5 本书都要送完，但不限定每人都要得到，有几种送法？

5．有 n 种不同的书，每种有 p 本，现在从这些书中取书，证明不同的取书方法共有 $(p+1)^n-1$ 种．

§1·7 组　合

让我们来看下面的问题：

问题　飞行在北京——上海——广州航空线上的民航飞机：

(1) 要准备多少种不同的飞机票？

(2) 有几种不同的飞机票价？

这个问题里的(1)是 3 个相异元素取 2 个元素不许重复的排列问题．从 $A_3^2=6$ 可知共有 6 种不同的飞机票，具体地说，就是

〔起点站〕	北京	北京	上海	上海	广州	广州
	↓	↓	↓	↓	↓	↓
〔终点站〕	上海	广州	北京	广州	北京	上海

至于这个问题里的(2)，性质与(1)有些不同．因为飞机票的种数和起点站、终点站有关，从北京到上海和上海到北京应当准备两种飞机票；但是，飞机票的票价只与起点站到终点站间的距离有关，从北京到上海和从上海到北京的飞机票价

是相同的. 由此，从(1)求出的结果可以看出，不同的飞机票价只有 $6\div2=3$ 种. 具体地说，就是

北京与广州间的票价，
北京与上海间的票价，
广州与上海间的票价.

象上面(2)这类问题，称为3个不同元素中取2个不同元素的组合问题.

一般地，在 m 个不同元素中，每次取出 n 个元素，不管怎样的顺序并成一组，称为 **m 个不同元素里每次取出 n 个不同元素的组合**①.

从上面的例子中可以看出，m 个不同元素中每次取 n 个不同元素的排列与组合之间，有以下的主要区别：

在排列中，要考虑元素间的先后顺序，所以在两个排列里，即使元素完全相同，只要这些元素间的先后顺序不同，就要看成是不同的排列.

在组合中，不考虑元素间的先后顺序，所以在两个组合里，只要元素完全相同，就是同一种组合.

抓住了“有没有顺序关系”这一点，就可以正确地判断被考虑的问题是排列问题还是组合问题.

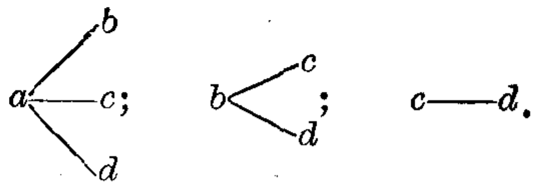
正因为组合问题是可以不考虑取出元素的先后顺序的，所以要作出具体的组合，可把所给的元素编上号码，规定小的号码在前、大的号码在后，再象§1·1作出具体的排列那样，把所有的组合无遗漏无重复地写出来.

例 写出在 a, b, c, d 这4个字母中每次取2个字母的所有组合.

---

① 对于组合问题，象排列问题一样，也有元素可以重复选取的组合和不尽相异元素的组合等等，本书中不研究这类问题.

【解】 我们按 $a—b—c—d$ 这一顺序来考虑：



由此可知，共有 6 种不同的组合，即

$$ab,\ ac,\ ad,\ bc,\ bd,\ cd.$$

习 题 1·7

1. (1) 写出1、2、3、4、5 这5个数字中每次取3个不同数字的所有不同的组合？这样的组合一共有几个？

(2) 在1、2、3、4、5这5个数字中取出3个不同数字，可以作成几个三位数？

(3) 从(1)与(2)的结果，可以发现：5个不同元素中每次取出3个元素所有组合的种数与5个不同元素中每次取出3个不同元素所有排列的种数之间有怎样的关系？

2. 判断下面这些问题里所指的是排列呢？还是组合？

(1) 小组里有甲、乙、丙、丁、戊5个组员，在假期里约定每两人要：

(i) 互通一封信，问他们总共要写多少封信？

(ii) 通一次电话，问他们总共要通几次电话？

(2) 平面内有 A, B, C, D, E 这5个点，其中无三点共线，问：

(i) 过这5点中任意两点，可作多少条不同的直线？

(ii) 以其中的一点为端点，并过另一点的射线有几条？

3. 在上题中，把每一小题的结果计算出来(如果是排列问题，可以直接应用公式来算，如果是组合问题，先把所有的组合写出，再数一数有多少个组合)．由此可以发现：5个相同元素中每次取出2个不同元素的所有组合的种数与所有排列的种数间有怎样的关系？

§1·8 组合数公式

在§1·7已经计算过：3个不同元素中每次取出2个不

同元素的所有组合的种数，就等于 3 个不同元素中每次取 2 个不同元素的所有排列的种数除以 2，这里"2"就是 2 个不同元素的全排列数 2!.

读者在习题 1·7 里也曾计算过：5 个不同元素中每次取出 3 个不同元素的所有组合的种数，就等于 5 个不同元素里每次取 3 个不同元素的所有排列的种数除以 6，这里"6"就是 3 个不同元素的全排列数 3!.

现在我们来证明：m 个不同元素中每次取出 n 个不同元素的所有组合的种数与所有排列的种数之间，都具有这样的关系.

定理 从 m 个不同元素里每次取出 n 个不同元素的所有组合的种数，等于从 m 个不同元素里每次取出 n 个不同元素的所有排列的种数除以 n 个元素的全排列数.

从 m 个不同元素里每次取出 n 个不同元素的所有组合的种数，通常用记号 C_m^n 来表示. 所以，证明上面的定理，也就只要证明下面这个等式成立：

$$C_m^n=\frac{A_m^n}{P_n}.$$

这里 m、n 都是自然数，且 $n\leqslant m$.

【证】 从 m 个不同元素里每次取出 n 个元素的排列，可以分成两个步骤来作出：第 1 步先从 m 个不同元素里取出 n 个元素；第 2 步再把这 n 个元素进行不同的全排列.

根据假设，m 个不同元素里每次取出 n 个不同元素的所有组合的种数是 C_m^n，而 n 个元素的全排列数是 P_n. 所以，根据乘法原则，可知它们的积

$$C_m^n\cdot P_n$$

应该等于 m 个不同元素里每次取出 n 个不同元素的所有排列

的种数 A_m^n. 这就是说,

$$C_m^n \cdot P_n = A_m^n.$$

$$\therefore \quad C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n}.$$

定理得证.

上面这个等式称为组合数公式. 这个公式可表成:

$$\boldsymbol{C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}}.$$

这就是说, 要计算 C_m^n 的值, 只需写出一个分式, 使它的分子是 n 个连续自然数的积,其中最大的一个数是 m, 分母是从1开始的 n 个连续自然数的积.

应用上面导出的 C_m^n 的计算公式, 就可以方便地解一些简单的组合问题.

例 1. 平面上有12个点,其中无3点在一直线上. 问:

(1) 这些点可以确定多少条不同的直线?

(2) 以这些点里的任意3个点作为三角形的顶点, 可以作出多少个不同的三角形?

【解】 (1) 因为每2点可以确定1条直线, 所以所求的直线条数就是12个不同元素里每次取出2个不同元素的所有组合的种数,即

$$C_{12}^2 = \frac{12\times 11}{1\times 2} = 66.$$

(2) 因为每3个点可以确定一个三角形, 所以所求的三角形个数就是12个不同元素里每次取出3个不同元素的所有组合的种数,即

$$C_{12}^3 = \frac{12\times 11\times 10}{1\times 2\times 3} = 220.$$

答: (1) 可以确定66条直线;

(2) 可以作220个不同的三角形.

习 题 1·8(1)

1. 计算:

(1) C_7^3; (2) C_7^4; (3) C_7^2; (4) C_7^5;

(5) C_8^1; (6) C_8^7; (7) C_8^2; (8) C_8^6.

比较上面(1)与(2),(3)与(4),(5)与(6),(7)与(8)求出的结果,可以发现组合数 C_m^n 有怎样的性质?

2. 证明:

(1) $C_8^3+C_8^2=C_9^3$; (2) $C_9^3+C_9^2=C_{10}^3$.

3. 求适合下列等式的自然数 n:

(1) $C_n^2=28$; (2) $C_n^4=A_n^3$.

4. 一次篮球比赛共有 8 个球队参加,比赛采取单循环制:

(1) 这次比赛一共要进行多少场次?

(2) 这次比赛冠军和亚军的获得者有多少种可能情况?

5. 空间有 10 个点,其中无 4 点在同一平面上:

(1) 过每 3 个点作一平面,一共可作多少个平面?

(2) 以其中的 4 个点为顶点的四面体一共有多少个?

象解排列问题一样,解某些条件比较复杂的组合问题,可以应用乘法原则或者加法原则,把它归结为若干个简单的组合问题来解.

例 2. 小组里有男同学 5 人、女同学 4 人,现在要推选男、女同学各 2 人,组成一个爱国卫生宣传小组,共有多少种选法?

分析 这个小组的组成,可以分成两个步骤来完成. 第一步,先从 5 个男同学中选出 2 人;第 2 步,再从 4 个女同学中选出 2 人. 然后并成一组. 因为,这两个步骤都完成后小组才能组成,所以要用乘法原则.

【解】 2 个男同学的选法有 C_5^2 种;

2 个女同学的选法有 C_4^2 种,

∴ 小组组成的方法有

$$C_5^2 \cdot C_4^2 = 10 \times 6 = 60\ (\text{种}).$$

答：有 60 种选法来组成这个小组.

例 3. 小组里有组员 9 人，其中的 2 人分别担任正副小组长. 从这 9 人里，欲派出 5 人去参加公益劳动，并要求派出的 5 人中至少有一位组长，共有几种不同的派法？

分析 因为派出的 5 人中至少要有一位组长，所以适合题意的派法有下面这两种情况：

(1) 只有一位组长在内，另外 4 人都是组员；

(2) 有二位组长在内，另外 3 人是组员.

根据加法原则，只要先分别求出(1)、(2)两种选法，再相加即可.

【解】 考虑如下两种情况：

(1) 2 个组长中派出 1 人、7 个组员中派出 4 人，共有派法

$$C_2^1 \cdot C_7^4 = 2 \times 35 = 70\ (\text{种}).$$

(2) 2 个组长都派去、另外再派 3 个组员，共有派法

$$C_2^2 \cdot C_7^3 = 1 \times 35 = 35\ (\text{种}).$$

所以，总共有派法

$$70 + 35 = 105\ (\text{种}).$$

答：共有 105 种不同的派法.

注 这问题也可以用另一种方法来解. 因为，如果没有至少有一组长的条件限制，那末显然有 C_9^5 种派法；中间除去派出的 5 人都是组员(派法有 C_7^5 种)这种派法外，余下的派法中就至少有 1 位组长在内. 所以，只需求 C_9^5 与 C_7^5 的差即可，由此得共有派法

$$C_9^5 - C_7^5 = 126 - 21 = 105\ (\text{种}).$$

例 4. 平面上有 10 个点，其中除有 4 个点在同一条直线上以外，不再有 3 点共线. 经过这些点，可以确定多少条直线？

分析 如果这 10 个点中没有任 3 个点在一直线上，那末可以确定

C_{10}^2 条直线. 现在既有 4 个点在同一直线上,确定的直线就不到 C_{10}^2 条,减少的条数应该就是: 这 4 点不在同一直线上时可以确定的直线条数(C_4^2 条)与实际能确定的直线的条数(1 条)之差(例如: 当点 A, B, C, D 这 4 个点共线时, AB, AC, AD, BC, BD, CD 这 6 条直线事实上只是 1 条直线).

【解】 (1) 10 个点中如果没有任 3 点共线时, 可以确定直线 C_{10}^2 条.

(2) 在同一直线上的这 4 个点,如果也是无 3 点共线时,可以确定直线 C_4^2 条. 现在,这 C_4^2 条直线只能算做 1 条.

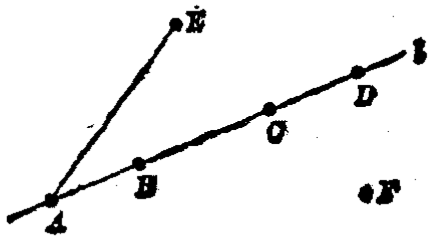
从(1)和(2)可知,经过这 10 个点可以确定的直线只有

$$C_{10}^2-(C_4^2-1)=45-(6-1)=40 \text{ (条)}.$$

答: 可以确定 40 条直线.

注 解这个问题也可以用另一种解法. 我们先把这 10 个点所确定的直线进行分类.

设 A, B, C, D 这 4 个点在同一直线 l 上, E, F, G, H, L, M(图中只画出其中两点)这 6 个点在直线 l 外. 由图可以看出, 它们所确定的直线有以下 3 类:



(1) 由 A, B, C, D 这 4 点所确定的直线只有 1 条.

(2) 由 A, B, C, D 这 4 点中的 1 点, 以及不在 l 上的 6 点中的 1 点, 所确定的直线有 $C_4^1\cdot C_6^1=24$ 条.

(3) 由不在 l 上的 6 点中的 2 点,所确定的直线有 $C_6^2=15$ 条.

所以,总共可以确定直线

$$1+24+15=40 \text{ (条)}.$$

从例 3 和例 4 可以看出: 一个条件比较复杂的组合问题,常常可以用不同的方法来解. 一般地说, 当应用加法原则来解题时,如果适合条件的组合种数容易计算,那末就先把适合条件的组合分成若干类(要注意: 不遗漏不重复),计算出各类

中组合种数，再求它们的和；如果不符合条件的组合种数容易计算，那末只需先不考虑条件，算出所有组合的种数，然后减去不适合条件的组合的种数.

习　题　1·8(2)

1．甲、乙、丙、丁、戊、己这 6 人中，选出 3 人出席一次会议，

(1) 如果甲、乙两人必须在内，有几种选法？

(2) 如果甲、乙两人都不在内，有几种选法？

(3) 如果甲、乙两人中有 1 人且只有 1 人在内，有几种选法？

(4) 如果甲、乙两人中至少有 1 人在内，有几种选法？

(5) 如果甲、乙两人不能同时在内，有几种选法？

[提示：(5)有下面这些情况：甲在内而乙不在内，甲不在内而乙在内，甲乙都不在内.]

2．在 1、2、…、9 这 9 个连续自然数中，任意取出两个数来：

(1) 积是奇数的取法有几种？

(2) 积是偶数的取法有几种？(用两种方法来解)

(3) 和是奇数的取法有几种？

(4) 和是偶数的取法有几种？(用两种方法来解)

3．证明：凸 n 边形有 $\frac{1}{2}n(n-3)$ 条对角线.

4．平面上有 10 个点，其中除有 4 个点在同一直线上外，不再有 3 点共线．以这些点中的每 3 个点为顶点，可以作出多少个不同的三角形？

5．平面内有 12 个点，其中有 4 个点在同一平面内，此外不再有 4 点共面.

(1) 这些点可以确定多少个平面？

(2) 以这些点里的每 4 个点为顶点的四面体有几个？

§1·9　组合数的两个性质

1．组合数的第一个性质　在习题 1·8(1) 的第 1 题里，

我们曾看到：

$$C_7^3=C_7^4,\ C_7^2=C_7^5,\ C_8^1=C_8^7,\ C_8^2=C_8^6.$$

现在来证明：对于一般的组合数 C_m^n 和 C_m^{m-n}，都具有这样的性质，就是

$$\boldsymbol{C_m^n=C_m^{m-n}},$$

这里 m、n 是自然数，且 $m>n$.

【证】 因为

$$C_m^n=\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdots n},$$

又注意到 $m>n$，即 $m-n$ 是自然数；所以，把上面这个分式的分子和分母都乘以

$$(m-n)(m-n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1,$$

这时，分子就是

$$m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)(m-n)\\ \times(m-n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1=m!,$$

分母就是

$$(1\cdot 2\cdot 3\cdots n)[1\cdot 2\cdot 3\cdots(m-n-1)(m-n)]\\ =n!(m-n)!.$$

由此即得

$$C_m^n=\frac{m!}{n!(m-n)!},$$

这里 m、n 是自然数，且 $m>n$.

在上式中，用 $m-n$ 代替 n，即得

$$C_m^{m-n}=\frac{m!}{(m-n)![m-(m-n)]!}=\frac{m!}{(m-n)!n!}.$$

由此可知

$$C_m^n=C_m^{m-n}.$$

这就证得了这一性质.

注 组合数的这一性质，也可根据组合的意义而得到解释．事实上，在m个不同元素中，每当取出n个元素作组合时，余下的$m-n$个元素也可看作是一组合，因此取出n个元素的一切组合的种数也就等于余下的$m-n$个元素的一切组合的种数，这就说明了$C_m^n=C_m^{m-n}$。

在上面证明过程中，导出的等式

$$C_m^n=\frac{m!}{n!(m-n)!}$$

是组合数C_m^n的又一表达式，它在证明有关组合数的关系式时很有用．

为了使这公式当$n=m$时也能适用，我们**规定**$0!=1$．这时，因为$C_m^m=1$，那末$1=\dfrac{m!}{m!(m-m)!}=\dfrac{m!}{m!0!}$，可见规定$0!=1$是合理的．

为了使上面所证得的这一组合性质对于$n=m$时也成立，通常还**规定**$C_m^0=1$．这时，因为$C_m^m=1$，那末$C_m^m=1=C_m^{m-m}=C_m^0$，可见规定$C_m^0=1$也是合理的．

注 在m个不同元素里，如果1个元素也不取出，显然只有1种可能选法，这个事实就可以用符号C_m^0来说明．

例1． 解方程$C_{18}^x=C_{18}^{x-2}$．

分析 要从上面的等式中求出x，只需列出一个关于x的整式方程．这里等号两边的两个组合数符号的下指标都是18，所以有两种可能：

(1) 它们的上指标相同．由此可得$x=x-2$，但是这个方程无解．

(2) 把C_{18}^x改用与它等值的符号C_{18}^{18-x}来代替，这时从$C_{18}^{18-x}=C_{18}^{x-2}$可得

$$18-x=x-2,$$

从中即可解出x的值．另一方面，如把C_{18}^{x-2}代以$C_{18}^{18-(x-2)}=C_{18}^{20-x}$，则从$C_{18}^x=C_{18}^{20-x}$即有$x=20-x$，由此也可解出$x$，只是和上面的结果是同样的．

【解】 因为 $C_{18}^{x}=C_{18}^{18-x}$，代入原方程 $C_{18}^{x}=C_{18}^{x-2}$，即得

$$C_{18}^{18-x}=C_{18}^{x-2}.$$

$$\therefore\quad 18-x=x-2,$$

$$\therefore\quad x=10.$$

将它代入原方程验算一下是适合的，所以原方程的解是 $x=10$.

注意 解未知数含在组合数符号中的方程时，必须注意两点：

(1) 求到的未知数的值，必须使代入组合数符号后有意义.

(2) 题中给出的组合数符号虽是 C_m^n，不要忽视了如果改用与 C_m^n 等值的符号 C_m^{m-n} 时的情况.

2．组合数的第二个性质 在习题1·8(1)的第2题里，还曾看到：

$$C_8^3+C_8^2=C_9^3,\quad C_9^3+C_9^2=C_{10}^3.$$

把这一事实推广到一般的情况，就得到组合数的第二个性质：

$$\boldsymbol{C_m^n=C_{m-1}^n+C_{m-1}^{n-1}}.$$

【证】 因为 $C_m^n=\dfrac{m!}{n!(m-n)!}$，所以

$$\begin{aligned}
&C_{m-1}^n+C_{m-1}^{n-1}\\
&=\frac{(m-1)!}{n![(m-1)-n]!}+\frac{(m-1)!}{(n-1)![(m-1)-(n-1)]!}\\
&=\frac{(m-1)!}{n!(m-n-1)!}+\frac{(m-1)!}{(n-1)!(m-n)!}\\
&=\frac{(m-1)!\cdot(m-n)}{n!(m-n)!}+\frac{(m-1)!\cdot n}{n!(m-n)!}\\
&=\frac{(m-1)![(m-n)+n]}{n!(m-n)!}=\frac{m\cdot(m-1)!}{n!(m-n)!}\\
&=\frac{m!}{n!(m-n)!},
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad C_m^n=C_{m-1}^n+C_{m-1}^{n-1}.$$

注 组合数的这个性质，也可以直接根据组合的意义利用加法原则来证明．事实上，从m个不同元素里每次取出n个不同的元素的组合，可以分成两类：

(1) 不含某一指定元素的．这就相当于从$m-1$个不同元素中每次取出n个不同元素的组合，所有这样的组合的种数是C_{m-1}^{n}；

(2) 一定含某一指定元素的．这就相当于从$m-1$个不同元素中每次取出$n-1$个不同元素的组合，所有这样的组合的种数是C_{m-1}^{n-1}。

由此，根据加法原则，得

$$C_{m-1}^{n}+C_{m-1}^{n-1}=C_{m}^{n}.$$

例 2． 求证 $C_{m}^{n+1}+C_{m}^{n-1}+2C_{m}^{n}=C_{m+2}^{n+1}$.

【证】 应用上面的组合数的第 2 个性质，我们有

$$\begin{aligned}C_{m}^{n+1}+C_{m}^{n-1}+2C_{m}^{n}&=C_{m}^{n+1}+C_{m}^{n-1}+C_{m}^{n}+C_{m}^{n}\\&=C_{m}^{n+1}+C_{m}^{n}+C_{m}^{n}+C_{m}^{n-1}\\&=C_{m+1}^{n+1}+C_{m+1}^{n}\\&=C_{m+2}^{n+1}.\end{aligned}$$

例 3． 求证 $C_{m}^{m}+C_{m+1}^{m}+C_{m+2}^{m}+\cdots+C_{m+k-1}^{m}=C_{m+k}^{m+1}$.

【证】 由上面的组合数的第 2 个性质，有

$$\begin{aligned}&C_{m}^{m}=C_{m+1}^{m+1},\\&C_{m+1}^{m+1}+C_{m+1}^{m}=C_{m+2}^{m+1},\\&C_{m+2}^{m+1}+C_{m+2}^{m}=C_{m+3}^{m+1},\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&C_{m+k-1}^{m+1}+C_{m+k-1}^{m}=C_{m+k}^{m+1}.\end{aligned}$$

将以上各式分别相加，得

$$\begin{aligned}&C_{m}^{m}+C_{m+1}^{m+1}+C_{m+1}^{m}+C_{m+2}^{m+1}+C_{m+2}^{m}+\cdots+C_{m+k-1}^{m+1}+C_{m+k-1}^{m}\\&=C_{m+1}^{m+1}+C_{m+2}^{m+1}+C_{m+3}^{m+1}+\cdots+C_{m+k-1}^{m+1}+C_{m+k}^{m+1}.\end{aligned}$$

经过整理，抵消同类项后即得

$$\begin{aligned}&C_{m}^{m}+C_{m+1}^{m}+C_{m+2}^{m}+\cdots+C_{m+k-1}^{m}\\&=C_{m+k}^{m+1}.\end{aligned}$$

习 题 1·9

1. 计算:

(1) C_{999}^{998};　　　　(2) $\frac{2}{197}C_{198}^{196}$.

2. 解方程:

(1) $C_{18}^{2x}=C_{18}^{x+2}$;　　　　(2) $C_{15}^{2x}=C_{15}^{2x-1}$.

3. 求证 $C_{m+2}^{n}=C_{m}^{n}+2C_{m}^{n-1}+C_{m}^{n-2}$.

4. 求证 $C_{m-1}^{n}+C_{m-2}^{n}+C_{m-3}^{n}+\cdots+C_{n+1}^{n}+C_{n}^{n}=C_{m}^{n+1}$.

5. 求证 $C_{m}^{n}=\frac{n+1}{m+1}C_{m+1}^{n+1}$.

6. 求证 $C_{m}^{0}+C_{m+1}^{1}+C_{m+2}^{2}+C_{m+3}^{3}+\cdots+C_{m+k-1}^{k-1}=C_{m+k}^{k-1}$.

[提示: 利用组合数的第1个性质和例3的结论.]

§1·10 排列、组合综合应用题

下面我们再来看几个需要综合运用关于排列、组合知识来解的应用题.

例1. 有不同的书6本,

(1) 平均分给甲、乙两人,有几种分法?

(2) 平均分成两堆,有几种分法?

【解】 (1) 不妨让甲先任意取3本,余下的就给乙,所以共有分法

$$C_6^3=\frac{6\times5\times4}{1\times2\times3}=20\ (种).$$

(2) 对于某3本书, 分给甲或者分给乙要算成两种不同分法,但是分成两堆只能算做同一种分法,所以所求的分法应该把(1)的分法再除以2, 由此得共有分法

$$\frac{C_6^3}{2}=\frac{20}{2}=10\ (\text{种}).$$

答：(1)有 20 种分法；(2)有 10 种分法.

注意 平均分组而不必考虑组的先后时，可以先假定按照组的顺序来分，然后再除以组数的全排列.

例 2. 将 4 个男孩子和 4 个女孩子分成两组，进行混合双打乒乓赛，不同的搭配方法有几种？

【解】 先把 4 个男孩子平均分成两组，有分法 $\frac{C_4^2}{2}=3$ 种.

把这 4 个男孩子看作各占据 1 个位置，再把 4 个女孩子对这 4 个位置进行搭配，这只需把 4 个女孩子作各种不同排列，排法有 P_4 种.

这两个步骤都完成后，搭配才能完成，所以共有搭配方法

$$\frac{C_4^2}{2}\cdot P_4=3\times 24=72\ (\text{种}).$$

注意 想一想，上面这个解法是怎样进行分析的？除掉这一解法外，还有什么不同的解法？

习 题 1·10

1. 有不同的书 6 本，分给甲、乙、丙 3 人，如果要使

(1) 甲得 3 本，乙得 2 本，丙得 1 本；

(2) 一人得 3 本，一人得 2 本，一人得 1 本；

(3) 每人各得 2 本，

各有几种分法？

2. 有不同的书 6 本，如果要分成三堆，使

(1) 一堆有 3 本，一堆有 2 本，一堆有 1 本；

(2) 每堆各有 2 本；

(3) 两堆各有 1 本，

各有几种分法？

*3. 把4个男同志和4个女同志平均分成4个小组，到4辆公共汽车里参加售票劳动. 如果同样两人在不同的公共汽车上服务算做不同的情况:

(1) 有几种不同的分配方法?

(2) 每个小组必须是一个男同志和一个女同志，有几种不同的分配方法?

(3) 男同志和女同志分别分组，有几种不同的分配方法?

[提示: (3)先把男女同志各分成两组，再对这4个小组作排列.]

*§1·11 概率

排列、组合知识的重要应用之一，是求某一事件出现的概率问题. 概率论是数学里一个独特的分支，它在生产实际中以及科学技术研究中都有广泛的应用. 这一节将简单介绍一下什么叫做概率，以及应用排列组合知识来求某一事件出现的概率的方法.

我们先来看下面的问题.

问题 从1、2、3、4、5、6、7、8、9这9个数字中，任意取出两个数字，

(1) 有几种取法?

(2) 其中和是奇数或者偶数的取法各有几种?

(3) 和是奇数或者偶数的取法各占全部取法的几分之几?

很明显，问题中的(1)是求9个不同元素中每次取出2个不同元素的所有组合的种数，所以共有取法

$$C_9^2=\frac{9\times 8}{1\times 2}=36\ (\text{种}).$$

问题中的(2)，曾在习题1·9(2)里解过，和是奇数的取法有

$$C_5^1\cdot C_4^1=20\ \text{种},$$

和是偶数的取法有

$$C_9^2-C_5^1\cdot C_4^1=36-20=16\ (\text{种}).$$

由此容易算出:

和是奇数的取法占全部取法的 $\frac{20}{36}$，就是 $\frac{5}{9}$，

和是偶数的取法占全部取法的 $\frac{16}{36}$，就是 $\frac{4}{9}$.

从上面的计算结果可以看出，取出来的两个数的和是奇数的可能性要大一些．为了说明这一事实，我们引用概率这一概念．我们说：从 1, 2, …, 9 这 9 个数字中，任意取出 2 个数字，和是奇数的概率是 $\frac{5}{9}$，和不是奇数的概率是 $\frac{4}{9}$.

在这个问题里，因为这两个数是任意取出的，所以取出的两个数或是(1, 2)，或是(1, 3)等等，其可能性是一样的；并且，取出了(1, 2)就不能取出(1, 3)．这样的两种取法，称为**等可能的、两两互斥的基本事件**(或者试验结果)．很明显，在这个问题里，一共有 36 种基本事件，其中有 20 种基本事件适合于"和是奇数"这一事件的出现．所谓"和是奇数"的概率，事实上也就是指适合于"和是奇数"这一事件出现的基本事件的种数与总共基本事件的种数这两者之比.

一般的，可以给出如下的定义：设在某种条件下进行试验，一共有 N 个等可能的、两两互斥的试验结果(基本事件)，其中有 k 个是适合于事件 A 的出现的．那末，A 的**概率**是 $\frac{k}{N}$，记作

$$P(A)=\frac{k}{N}.$$

例如，在上面的问题里，把"和是奇数"看成是事件 A，"和是偶数"看成是另一事件 B，那末有

$$P(A)=\frac{5}{9},\qquad P(B)=\frac{4}{9}.$$

如果问题里只要研究某一种事件出现的概率或者不出现的概率，常常用字母 p 来表示这一事件出现的概率，字母 q 表示这一事件不出现的概率.

例如，上面这个问题里，对于"和是奇数"的事件来说，

$$p=\frac{5}{9},\qquad q=\frac{4}{9}.$$

很明显，p 与 q 之间存在着以下的关系：

$$p+q=1,$$

就是

$$q=1-p.$$

理解了上面所讲的关于概率的意义，就可以应用前面学过的知识来解一些简单的概率问题.

例1. 箱子里有100个零件，其中混进了2个次品. 现在顺手取出5个零件来检验，求次品恰巧都被检到的概率.

【解】 在100个零件里任取出5个的取法有C_{100}^5种，取出的5个零件中恰巧有2件次品的取法有$C_{98}^3\cdot C_2^2$种。所以，次品恰巧被检到的概率是

$$p=\frac{C_{98}^3\cdot C_2^2}{C_{100}^5}=\frac{\dfrac{98\times97\times96}{1\times2\times3}}{\dfrac{100\times99\times98\times97\times96}{1\times2\times3\times4\times5}}$$

$$=\frac{20}{9900}=\frac{1}{495}.$$

习 题 1·11(1)

1. 在例1中，求取出的5个零件中：

(1) 只有1个是次品的概率；

(2) 至少有1个次品的概率.

2. 在50根纤维中，有16根长度超过30毫米，从这些纤维里任意取出一根，求：

(1) 这根的长度超过30毫米的概率；

(2) 这根的长度等于或不足30毫米的概率.

3. 有12齿和18齿的齿轮衔接在一起旋转，其中各有一齿磨损，现准备进行检修，求拆下时：

(1) 恰巧两个磨损的齿衔接在一起的概率；

(2) 衔接的两齿中至少有一个是磨损的齿的概率.

4. 有热水瓶60只作为处理品出售，其中48只是二等品，其余是三等品. 现在从这些热水瓶里任意取出两只，求：

(1) 这两只热水瓶都是二等品的概率；

(2) 这两只热水瓶中二等品三等品各有一只的概率.

下面再来看一些条件比较复杂的概率问题的解法.

例 2. 一盒螺钉 20 个中有 16 个是合用的，另一盒螺母 20 个中有 15 个是合用的. 现在从两盒中各取一个螺钉和螺母，求两个都合用的概率.

分析 按照题意，取用时有两个步骤，每一步骤都成功才能达到目的. 因此，只需先算出每一步骤成功的概率，再应用乘法原则求它们的积.

【解】 取出的螺钉是合用的概率：$p_1=\dfrac{16}{20}$.

取出的螺母是合用的概率：$p_2=\dfrac{15}{20}$.

于是，两个都合用的概率：

$$p=p_1p_2=\frac{16}{20}\times\frac{15}{20}=\frac{3}{5}.$$

例 3. 有 20 个零件，其中有 12 个是合用的. 现在每次取出一件来检验，求前两次所检验的零件：

(1) 都是合用的概率；

(2) 第一个不合用，第二个才合用的概率.

【解】 (1) 第一次检到的零件是合用的概率：$p_1=\dfrac{12}{20}$.

第二次检到的零件是合用的概率：$p_2=\dfrac{11}{19}$.（想一想，这是为什么？）

所以，所求的概率是

$$p=p_1\cdot p_2=\frac{12}{20}\times\frac{11}{19}=\frac{33}{95}.$$

(2) 第一次检到的零件不合用的概率：$q_1=1-p_1=\dfrac{8}{20}$.

第二次检到的零件是合用的概率：$p_2=\dfrac{12}{19}$.（想一想：这是为什么？）

所以，所求的概率是

$$p=q_1\cdot p_2=\frac{8}{20}\times\frac{12}{19}=\frac{24}{95}.$$

习 题 1·11(2)

1．一个事件发生的概率已知是 $\frac{1}{4}$，

(1) 这个事件不发生的概率是多少？

(2) 在连续两次试验中，这个事件都发生的概率是多少？

(3) 在连续两次试验中，这个事件第一次不发生而第二次发生的概率是多少？

(4) 在连续两次试验中，这个事件至少发生一次的概率是多少？

2．制造一种零件要经过三道工序，第一道工序出废品的概率是 0.5%，第二道工序出废品的概率是 1%，第三道工序出废品的概率是 1.5%．如果这三道工序的生产情况是互不影响的，那末这三道工序完成后制造出的一个零件是合格品的概率是多少？

3．一个气象站天气预报的正确性达 95%，求三次预报中：

(1) 只有两次是正确的概率；

(2) 至少有两次是正确的概率．

4．一个工人同时看管 5 部机器，在 1 小时内每部机器需要照顾的概率为 $\frac{1}{3}$．求在 1 小时内：

(1) 没有一部机器需要照顾的概率；

(2) 至少有 4 部机器需要照顾的概率．

本 章 提 要

1．基本原则

(1) 乘法原则——一事的完成可分 n 个步骤，每一步骤各有方法 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 种，完成此事的不同方法种数是

$$N = m_1 \cdot m_2 \cdots m_n.$$

(2) 加法原则——一事完成可有 n 类不同方法，每一类中又分别有 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 种不同方法，完成此事的不同方法种数是

$$N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n.$$

2．基本公式

(1) m 个不同元素中取 n 个元素的排列种数:

不许重复时: $A_m^n=m(m-1)\cdots(m-n+1)$;

特　　例: $A_m^m=P_m=m!$;

可以重复时: $N=m^n$.

(2) m 个不同元素中取 n 个不同元素的组合种数:

$$C_m^n=\frac{A_m^n}{P_n}=\frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

(3) 组合数的两个性质:

$$C_m^n=C_m^{m-n},$$
$$C_m^n=C_{m-1}^n+C_{m-1}^{n-1}.$$

(4) 简单事件的概率 $P(A)=\frac{k}{N}$.

复 习 题 一

1．求证 $P_1+2P_2+3P_3+\cdots+nP_n=(n+1)!-1$.

2．(1) 已知 $C_{n+3}^{n+1}=C_{n+1}^{n-1}+C_{n+1}^n+C_n^{n-2}$, 求 n;

(2) 已知 $C_n^3:C_n^2=44:3$, 求 n;

(3) 已知 $C_{18}^x=C_{18}^{x+2}$, 求 C_x^5;

(4) 已知 $C_m^{m-1}=C_{n+1}^{n-1}$, 求证 $m=1+2+3+\cdots+n$.

3．用数字 0、1、2、3、4、5 组成没有重复数字的数,

(1) 能够组成多少个自然数?

(2) 能够组成多少个六位的奇数?

(3) 能够组成多少个是 25 的倍数的四位数?

(4) 能够组成多少个比 201345 大的数?

4．8 个人排成一排, 如果:

(1) 其中某 2 个人要排在一起;

(2) 其中某 2 个人不排在一起;

(3) 其中某 4 个人要排在一起、另外 4 个人也要排在一起,

问有多少种不同排法?

5．用 1、2、3、4、5、6 六个数字,

(1) 如果数字不允许重复;

(2) 如果数字允许重复,

可作成多少个五位的不同奇数?

*6. 某人过去射击的成绩, 每射 5 次总有 4 次可以射中目标. 根据这一成绩, 求:

(1) 射击 3 次全部射中目标的概率?

(2) 射击 3 次中有 2 次, 并且只有 2 次射中目标的概率?

(3) 射击 3 次中至少射中 2 次的概率?

第二章　数学归纳法

数学归纳法是数学中的一种非常重要的证明方法，许多命题的证明都要用到这种方法．本章将在说明数学归纳法的意义的基础上，着重学习数学归纳法的应用．

§2·1　归纳推理和演绎推理

在数学里，经常要使用推理方法，从一些已知正确的判断，作出新的判断．

例如，在研究等比数列的通项公式时，曾进行过这样的推理：

设 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ 是一个公比为 q 的等比数列 $(a_1 \neq 0,\ q \neq 0)$，那末，根据等比数列的定义，知道

$$\frac{a_2}{a_1}=q, \quad \therefore \quad a_2=a_1q;$$

$$\frac{a_3}{a_2}=q, \quad \therefore \quad a_3=a_2q=a_1q^2;$$

$$\frac{a_4}{a_3}=q, \quad \therefore \quad a_4=a_3q=a_1q^3;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

观察上面这些等式，可以看到：等比数列第二项起的各个项，都可以写成第 1 项 a_1 和公比 q 的幂的乘积；并且，在这个积里，q 的幂的指数就等于这一项的项数减去 1，就是

$$a_2=a_1q^{2-1},\ a_3=a_1q^{3-1},\ a_4=a_1q^{4-1},\ \cdots.$$

据此可以归纳出，这个等比数列的第 n 项一定是

$$a_n=a_1q^{n-1}\quad(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots).$$

在这个公式里，如果令 $n=1$，那末可得

$$a_1=a_1q^{1-1}=a_1q^0=a_1.$$

所以 a_1 也可以应用这个公式来表示．由此可以得出定理：

第 1 项是 a_1，公比是 q 的等比数列的通项公式是

$$a_n=a_1q^{n-1},$$

式中 $a_1\neq0,\ q\neq0,\ n$ 为自然数．

这里，就是从等比数列的定义出发，通过推理的方法，推出了一个新的判断——等比数列通项公式．

又如，在研究一元二次方程的根的性质时，我们知道，对于实系数的方程

$$ax^2+bx+c=0,$$

当它的判别式 $b^2-4ac<0$ 时没有实数根．而方程

$$x^2+x+1=0$$

的判别式

$$b^2-4ac=1-4=-3<0.$$

因此可以作出结论：方程 $x^2+x+1=0$ 没有实数根．这里也是应用了推理的方法．

考察上面所举的两例子的推理过程，可看出两者有着不同的特点．在前面这个例子里，首先是考察一些特殊的事例，然后分析它们共同具有的特征，作出了一般的结论．象这种由特殊到一般的推理方法，通常称为**归纳推理**，或者**归纳法**．在后面这个例子里，从一般的实系数一元二次方程的根所具有的性质，推出了特殊的实系数一元二次方程 $x^2+x+1=0$ 的根所具有的性质．象这种从一般到特殊的推理方法，通常称为**演绎推理**，或者**演绎法**．

应该注意，应用演绎推理时，只要在推理过程中不发生错误，那末从已知正确的判断所作出的新的判断，也总是正确的．但是，应用归纳推理，却不是这样．

我们来看下面的例子：

设 $f(x)=x^2+x+11$．现在取 $x=1, 2, \cdots, 9$ 等自然数值来计算 $f(x)$ 的值．得

$$f(1)=1+1+11=13,$$
$$f(2)=2^2+2+11=17,$$
$$f(3)=3^2+3+11=23,$$
$$f(4)=4^2+4+11=31,$$
$$f(5)=5^2+5+11=41,$$
$$f(6)=6^2+6+11=53,$$
$$f(7)=7^2+7+11=67,$$
$$f(8)=8^2+8+11=83,$$
$$f(9)=9^2+9+11=101.$$

可以看出，上面所算出的这些值都是质数．因此，可以得出一个结论：

当 x 是 1 到 9 的自然数时，函数 $f(x)=x^2+x+11$ 的值总是质数．

很明显，这个结论是正确的．

但是，是不是也可以象开始时所举的那个例子一样，归纳出一个更加一般的结论："当 x 是任意自然数的时候，$f(x)=x^2+x+11$ 的值总是质数"呢？

只要取 $x=10$ 来验算一下，

$$f(10)=10^2+10+11=121=11^2,$$

它就不是一个质数，所以这个结论是错误的．

从这个例子可以看到，应用归纳推理的时候，如能把所有

的情况都列举出来，由此得出的结论可以保证一定是正确的．这种证法通常叫做列举法(穷举法)．但是对于只从一些个别的情况所归纳出来的一般的结论(这种推理称为**不完全归纳法**)就不一定正确．

习　题　2·1

1．无穷数列的前5项是:

(1) $a_1=1,\ a_2=\frac{4}{3},\ \ a_3=\frac{6}{4},\ \ a_4=\frac{8}{5},\ \ a_5=\frac{10}{6}$;

(2) $a_1=1\frac{1}{2},\ a_2=1,\ a_3=\frac{5}{6},\ \ a_4=\frac{3}{4},\ \ a_5=\frac{7}{10}$.

观察这些已给出的项的特点，写出一个用项数 n 来表示它的通项 a_n 的公式．

[解法举例: (1) $a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5$ 的分母都比项数大1，而分子是项数的2倍；并且 $a_1=1=\frac{2}{2}=\frac{2\cdot1}{1+1}$ 也具有这样的特点，所以这个数列的通项是 $a_n=\frac{2n}{n+1}$.]

2．考察下面这两个数列所给出的各项与项数间有怎样的关系？由此写出它们的通项公式:

(1) $1,\quad 4,\quad 9,\quad 16,\quad 25,\ \cdots$;

(2) $\frac{3}{2},\ \frac{13}{3},\ \frac{37}{4},\ \frac{81}{5},\ \frac{151}{6},\ \cdots$.

§2·2　数学归纳法

上节曾指出，应用不完全归纳法，考察一些特殊情况所归纳出来的一般结论，是不一定正确的．因此，它仅仅提出了一种合理的设想，这个设想是否能够成立，还需要作进一步的证明．

例如，在自然数列里，我们来考察从第一个奇数开始的各

个连续奇数的和．注意到：

$$1=1=1^2,$$
$$1+3=4=2^2,$$
$$1+3+5=9=3^2,$$
$$1+3+5+7=16=4^2,$$
$$1+3+5+7+9=25=5^2,$$

发现了一个重要的事实：自然数列里前 1 个，2 个，…，5 个连续奇数的和，恰巧都等于这个和里加数个数的平方．很自然会作出这样的一般结论：

自然数列里前 n 个连续奇数的和等于 n^2.

但是，这里毕竟只考察了少数几种情况，发现有这样的规律，这个结论是不是对于任意的自然数 n 都正确呢？这就必须作进一步的证明．

怎样证明这个结论确实是正确的呢？企图用一一验算的办法，显然是不行的．但是，如果能够证得"当和式里连续奇数的个数是某一个自然数(例如当 $n=k$)时这个结论正确，可以推出对和式里连续奇数的个数再增加 1 个(例如，当 $n=k+1$)时也一定正确"这一事实，这时，就可以应用递推的方法，从这个结论对于 $n=1$ 正确，而推出对于 $n=2$ 也正确；对于 $n=2$ 正确，推出对于 $n=3$ 也正确……；这样顺次地推下去，显然，这个结论对于所有的自然数 n 都正确．

我们就采用这样的思想方法来证明上面这个结论．因为任何一个奇数都可以表示成 $2n-1$(n 是自然数)的形式，所以欲证明上面这个结论，也就是要证明等式

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2 \tag{1}$$

对于所有的自然数 n 都成立．

【证】 当 $n=1$ 时，有 $1=1^2$，所以式(1)成立．

假定当 $n=k$ 时等式(1)成立，即

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2 \tag{2}$$

成立.

那末，当 $n=k+1$ 时，式(1)的左边是

$$\begin{aligned}
&1+3+5+\cdots+[2(k+1)-1]\\
&\quad=[1+3+5+\cdots+(2k-1)]+[2(k+1)-1]\\
&\quad=k^2+(2k+1) \qquad\qquad [\text{应用式}(2)]\\
&\quad=(k+1)^2,
\end{aligned}$$

而这时式(1)的右边也是 $(k+1)^2$，所以式(1)当 $n=k+1$ 时：

$$\text{左边}=\text{右边}.$$

这就是说，式(1)当 $n=k+1$ 时也成立.

这样，因为已验证了等式(1)当 $n=1$ 时成立，可以顺次地推出当 $n=2, 3, 4, 5, \cdots$ 时都成立，所以式(1)对于所有的自然数 n 都成立.

上面证明中所采用的方法，称为**数学归纳法**. 从证明中可以看出，应用数学归纳法来证明一个命题，有下面这两个步骤：

1° 先证明当命题中 n 取第一个自然数值 a（例如 $n=1$，或者 $n=2$，等等）时，这个论断是正确的.

2° 假定命题中 n 取某一自然数值 k 时这个论断正确；在这基础上证明命题中 n 取后一个自然数值 $k+1$ 时，这个论断也正确.

在证实了这两步之后，就可以作出结论："命题对于从 a 开始的所有自然数 n 都正确."

在实际解题时的叙述可以比上面证明中的叙述再简化一些.

例 1. 证明

$$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1. \tag{3}$$

【证】 1° 当 $n=1$ 时，左边$=1$，右边$=2^1-1=1$，式(3)显然成立.

2° 假定当 $n=k$ 时式(3)成立，即

$$1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}=2^k-1, \tag{4}$$

那末，由

$$\begin{aligned}&(1+2+2^2+\cdots+2^{k-1})+2^{(k+1)-1}\\&=2^k-1+2^k \qquad [\text{应用式}(4)]\\&=2\cdot2^k-1\\&=2^{k+1}-1\end{aligned}$$

可知，式(3)当 $n=k+1$ 时也成立.

根据 1° 和 2°，这就证得了式(3)对于所有的自然数 n 都成立.

例 2. 证明

$$1-3+5-7+\cdots+(-1)^{n-1}(2n-1)=(-1)^{n-1}\cdot n. \tag{5}$$

【证】 1° 当 $n=1$ 时，式(5)的左边$=1$，右边$=(-1)^0\cdot1=1$. 所以式(5)显然成立.

2° 假定式(5)当 $n=k$ 时成立，即

$$1-3+5-7+\cdots+(-1)^{k-1}(2k-1)=(-1)^{k-1}\cdot k. \tag{6}$$

那末，当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}\text{左边}&=[1-3+5-7+\cdots+(-1)^{k-1}(2k-1)]\\&\quad+(-1)^{(k+1)-1}[2(k+1)-1]\\&=(-1)^{k-1}\cdot k+(-1)^k(2k+1) \qquad [\text{应用式}(4)]\\&=(-1)^k[(2k+1)-k]\\&=(-1)^k(k+1),\end{aligned}$$

$$\text{右边}=(-1)^{(k+1)-1}(k+1)=(-1)^k(k+1),$$

$$\therefore\quad \text{左边}=\text{右边}.$$

所以当 $n=k+1$ 时式(5)也成立.

根据 1° 和 2°, 可知式(5)对于所有的自然数 n 都成立.

注 1. 上面例1和例2在第2步的证明中, 叙述方法虽然不同, 但精神是一样的. 一般来说, 如果待证式子的右边比较简单, 可以采用例1的叙述方法; 待证式子的右边比较复杂, 那末可以采用例2的叙述方法.

2. 在例1和例2的证明里, 在第2步都先提出了"假定待证式子当 $n=k$ 时成立", 这通常称为**归纳法假定**, 下一步在证明当 $n=k+1$ 时待证式子也成立中必须用到这个假定.

习 题 2·2(1)

应用数学归纳法, 证明以下各题:

1. $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

2. $1+3+9+\cdots+3^{n-1}=\dfrac{3^n-1}{2}$.

3. $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n(n+1)=\dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

4. $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots+n(n+1)(n+2)$

   $=\dfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$.

5. $1-2+4-8+16-\cdots+(-1)^{n-1}2^{n-1}=(-1)^{n-1}\dfrac{2^n}{3}+\dfrac{1}{3}$.

6. $\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot7}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$.

例 3. 证明

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2. \tag{7}$$

【证】 根据等差数列的前 n 项的和的公式, 可知

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

所以, 本题只需证明

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2. \tag{8}$$

1° 当 $n=1$ 时,式(8)显然成立.

2° 假定当 $n=k$ 时,式(8)成立,即

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2, \tag{9}$$

那末,当 $n=k+1$ 时,式(8)的

$$\begin{aligned}
\text{左边}&=(1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3)+(k+1)^3\\
&=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2+(k+1)^3 \qquad [\text{应用式}(9)]\\
&=\frac{(k+1)^2}{4}[k^2+4(k+1)]\\
&=\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2,
\end{aligned}$$

$$\text{右边}=\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2,$$

$$\therefore \quad \text{左边}=\text{右边}.$$

所以当 $n=k+1$ 时式(8)成立.

根据 1° 和 2°, 可知式(8)对于所有的自然数 n 都成立, 从而可知式(7)对于所有的自然数 n 也都成立.

例 4. 当 $n\geqslant 2$ 时,证明

$$\begin{aligned}
&(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2\\
&\quad=(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)+2(a_1a_2+a_1a_3+\cdots\\
&\qquad+a_1a_n+a_2a_3+a_2a_4+\cdots+a_2a_n+\cdots+a_{n-1}a_n).
\end{aligned} \tag{10}$$

【证】 1° 当 $n=2$ 时, 左边$=(a_1+a_2)^2=a_1^2+2a_1a_2+a_2^2$, 右边$=a_1^2+a_2^2+2a_1a_2$, 所以式(10)成立.

2° 假定当 $n=k$ 时式(10)成立,即

$$(a_1+a_2+\cdots+a_k)^2$$
$$=(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2)+2(a_1a_2+a_1a_3+\cdots$$
$$+a_1a_k+a_2a_3+a_2a_4+\cdots+a_2a_k+\cdots+a_{k-1}a_k), \quad (11)$$

那末，当 $n=k+1$ 时，式(10)的

$$\text{左边}=[(a_1+a_2+\cdots+a_k)+a_{k+1}]^2$$
$$=(a_1+a_2+\cdots+a_k)^2+2a_{k+1}(a_1+a_2+\cdots$$
$$+a_{k-1}+a_k)+a_{k+1}^2$$
$$=\{(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2)+2(a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_1a_k$$
$$+a_2a_3+a_2a_4+\cdots+a_2a_k+\cdots+a_{k-1}a_k)\}$$
$$+2a_1a_{k+1}+2a_2a_{k+1}+\cdots+2a_{k-1}a_{k+1}$$
$$+2a_ka_{k+1}+a_{k+1}^2 \qquad [\text{应用式(11)}]$$
$$=(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2+a_{k+1}^2)+2(a_1a_2+a_1a_3+\cdots$$
$$+a_1a_k+a_1a_{k+1}+a_2a_3+a_2a_4+\cdots$$
$$+a_2a_k+a_2a_{k+1}+\cdots$$
$$+a_{k-1}a_k+a_{k-1}a_{k+1}+a_ka_{k+1}),$$

这恰巧与式(10)的右边相同，所以当 $n=k+1$ 时式(10)也成立.

根据 1° 和 2°，可知式(10)对所有大于 1 的自然数 n 都成立.

说明 1. 在这个例子里，题目上指定 $n\geqslant2$，所以第 1 步要从 $n=2$ 开始检验.

2. 式(10)右边第 2 个括号里的

$$a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_1a_n+a_2a_3+a_2a_4+\cdots+a_2a_n+\cdots+a_{n-1}a_n,$$

就是 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 这 n 个相异元素中每次取 2 个相乘而作出的各种可能组合的和.

* 从上面这些例子里可以看出，用数学归纳法来证明一个命题时，在作出最后结论前，总是有着这样的格式：

1° 当 $n=a$ 时，命题成立；

2° 假定当 $n=k$ 时，命题成立，即……，证明当 $n=k+1$ 时，……，命题也成立.

这里，第1步只要直接进行检验，第2步则要根据题目的具体内容，利用归纳法假定来进行推导.

必须注意，上面这两个步骤中，第1个步骤是递推的基础，第2个步骤是递推的依据，缺少任一步骤都是不行的．不然就会得出错误的结论.

例如，如果不考虑递推的依据，只验证了当 $x=1$ 时，甚至 $x=2, 3, \cdots, 9$ 时，

$$f(x)=x^2+x+11$$

的值都是质数，就作出：对于所有的自然数 x，$f(x)$ 的值都是质数的结论就错误了.

又如，在例1里，如果不先验证：当 $n=1$ 时，

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2+1$$

这一等式是否正确，直接考虑第2个步骤：

假定这个等式当 $n=k$ 时成立，就是 $1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2+1$，那末容易推出

$$\begin{aligned}&1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)\\&=(k^2+1)+2k+1\\&=(k+1)^2+1,\end{aligned}$$

这个等式在 $n=k+1$ 时也成立．从而会作出错误的结论："自然数列里前 n 个连续奇数的和等于 n^2+1".

习　题　2·2(2)

用数学归纳法，证明：

1．首项是 a_1、公差是 d 的等差数列：

(1) 通项是 $a_n=a_1+(n-1)d$；

(2) 前 n 项的和是 $S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$.

2．首项是 $a_1(a_1\neq 0)$、公比是 $q(q\neq 1)$的等比数列：

(1) 通项是 $a_n=a_1q^{n-1}$；

(2) 前 n 项的和是 $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$.

3. 自然数列里，前 n 个自然数的平方和:

$$S_n=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

4. 如果一个数列的通项是 $\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}$，那末这个数列前 n 项的和是 $\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

5. 自然数列里前 n 个连续奇数的平方和是 $\frac{1}{3}n(2n+1)(2n-1)$.

§2·3 数学归纳法在证明不等式中的应用

在证明某些对于所有自然数(或者，从某一个自然数起的所有自然数)都能成立的不等式中，也常常应用数学归纳法.

例 1. 求证

$$\frac{a^n+b^n}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^n, \tag{1}$$

这里 $a>0$, $b>0$, n 是自然数.

【证】 1° 当 $n=1$ 时，显然有 $\frac{a+b}{2}=\frac{a+b}{2}$，这时式(1)中等号成立.

当 $n=2$ 时，式(1)的左、右端分别为:

$$\text{左边}=\frac{a^2+b^2}{2},\quad \text{右边}=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

这时，因为

$$\begin{aligned}\frac{a^2+b^2}{2}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2&=\frac{2a^2+2b^2}{4}-\frac{a^2+2ab+b^2}{4}\\&=\frac{a^2-2ab+b^2}{4}=\frac{(a-b)^2}{4}\geqslant0,\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \frac{a^2+b^2}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

所以式(1)当 $n=2$ 时也成立.

2° 假设式(1)在 $n=k(k\geqslant 2)$ 时成立,即

$$\frac{a^k+b^k}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^k. \tag{2}$$

因为题设 $a>0,\ b>0$, 所以 $\frac{a+b}{2}>0$, 在式(2)的两边同乘以 $\frac{a+b}{2}$, 得

$$\left(\frac{a^k+b^k}{2}\right)\cdot\left(\frac{a+b}{2}\right)\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1},$$

就是

$$\frac{a^{k+1}+ab^k+ba^k+b^{k+1}}{4}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1}. \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\because\quad &\frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}-\frac{a^{k+1}+ab^k+ba^k+b^{k+1}}{4}\\ &=\frac{a^{k+1}-ba^k+b^{k+1}-ab^k}{4}\\ &=\frac{(a-b)a^k-(a-b)b^k}{4}\\ &=\frac{(a-b)(a^k-b^k)}{4},\end{aligned} \tag{4}$$

这里,因为 $a,\ b$ 都是正数,所以

当 $a>b$ 时,有 $a^k>b^k$, $a-b$, a^k-b^k 都是正数;

当 $a<b$ 时,有 $a^k<b^k$, $a-b$, a^k-b^k 都是负数.

所以,当 $a\neq b$ 时,总有

$$\frac{(a-b)(a^k-b^k)}{4}>0;$$

又,当 $a=b$ 时,显然有 $\frac{(a-b)(a^k-b^k)}{4}=0$. 由此可知

$$\frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}\geqslant\left(\frac{a^k+b^k}{2}\right)\cdot\left(\frac{a+b}{2}\right)\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1}.$$

这就是说，当 $n=k+1$ 时，式(1)也成立.

根据 1° 和 2°，即可断言：原式对于任意的自然数 n 都成立.

注意 1. 第 1 步的证明虽然比较简单，但是也应注意，如果只验证 $n=1$ 时的情况，只能说明式(1)的等号成立，所以还必须验证 $n=2$ 时的情况.

2. 第 2 步的证明中，如直接比较 $\frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}$ 与 $\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1}$ 的大小，是比较困难的，所以采用了在承认(1)式的前提下，两边同乘以一个正数 $\frac{a+b}{2}$ $\left(\text{注意：在这一步中必须证明 } \frac{a+b}{2}>0\right)$，这样，不等式的右边变成 $\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1}$ 就与所要证的一致，留下来只需证明 $\frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}$ 不小于 $\left(\frac{a^k+b^k}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 就可以了. 由此可以看出，应用数学归纳法证明问题时，要善于应用归纳法假定，作合理的推导. 同时，在叙述上也不宜拘泥于一格.

3. 对于这个例题，读者还可考虑一下：

(1) 如果 $a>0, b>0, a\neq b$, n 为自然数，那末 $\frac{a^n+b^n}{2}$ 与 $\left(\frac{a+b}{2}\right)^n$ 将有怎样的关系？

(2) 如果题设条件改为 $a<0, b<0$, n 为自然数，这个不等式是否仍能成立？如果缺掉了 $a>0, b>0$ 这一条件呢？

例 2. 求证：当 n 是 1，或是不小于 5 的自然数时，总有

$$2^n>n^2. \tag{5}$$

分析 第 2 步证明中，需要从(归纳法假定) $2^k>k^2 (k\geqslant5)$ 推出

$$2^{k+1}>(k+1)^2.$$

从归纳法假定可知 $2^{k+1}>2k^2$，因此，要证明不等式 $2^{k+1}>(k+1)^2$ 成立，只需证明 $2k^2>(k+1)^2$，即

$$k^2>2k+1,$$

即

$$k>2+\frac{1}{k}.$$

而当 $k\geqslant5$ 时，$2+\frac{1}{k}<3$，所以 $k>2+\frac{1}{k}$ 显然成立.

【证】 1° 当 $n=1$ 时，左边$=2$，右边$=1$，左边$>$右边，式(5)成立．当 $n=5$ 时，左边$=2^5=32$，右边$=5^2=25$，左边$>$右边，式(5)也成立.

2° 假设式(5)当 $n=k(k\geqslant5)$ 时成立，即

$$2^k>k^2 \quad (k\geqslant5). \tag{6}$$

两边各乘以 2，得

$$2^{k+1}>2k^2. \tag{7}$$

从已知条件 $k\geqslant5$，可推得 $2+\frac{1}{k}<3$，从而有

$$k>2+\frac{1}{k}.$$

两边同乘以 k，得

$$k^2>2k+1,$$

两边再同加上 k^2，得

$$2k^2>(k+1)^2. \tag{8}$$

由式(7)和(8)得

$$2^{k+1}>(k+1)^2.$$

这就是说：当 $n=k+1(k\geqslant5)$ 时，式(5)也成立.

根据 1° 和 2°，可以断言：当 $n=1$，或者 n 是不小于 5 的自然数时，式(5)是恒成立的.

注意 想一想：在上面的证明中，从归纳法假定 $2^k>k^2$ 推出 $2^{k+1}>2k^2$，只需加上一个条件 $k\geqslant3$ $\left(\text{这条件在证明 } k>2+\frac{1}{k} \text{ 时要用到}\right)$ 就够了．由此，能不能把这个不等式成立的范围扩大到对于一切不小于 3 的自然数 n 都成立？

习 题 2·3

1．用数学归纳法，证明：

(1) $(1+h)^n>1+nh$ ($h>-1, h\neq 0$, n 是大于 1 的自然数);

(2) $2^n>n$ (n 是自然数).

2. (1) 证明: 当 $k\geqslant 4$ 时, $k^3>3k^2+3k+1$ (k 是自然数);

(2) 要使不等式

$$2^n>n^3$$

成立, n 可取哪些自然数的值?

[提示: $n=1$ 是显然成立的,除此之外,应先通过直接检验,看 n 取哪一个最小的自然数值才能使这个不等式成立,然后应用数学归纳法证明 n 取比这个自然数大的一切自然数都能使这个不等式成立.]

本 章 提 要

应用数学归纳法证题的一般步骤

1° 先验证 n 取第一个自然数值 a 时命题成立(这是递推的基础);

2° 再作出归纳法假定: "设 $n=k(k\geqslant a)$ 时命题成立", 然后利用这个假定以证明: "当 $n=k+1$ 时命题也成立"(这是递推的根据).

证实了这两点, 就可作出结论: "对于从 a 开始的所有自然数 n, 命题都成立"(此即是在 1° 的基础上利用 2° 的结论进行递推).

复 习 题 二

1. 用数学归纳法, 证明:

(1) $1+x+x^2+\cdots+x^n=\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ ($x\neq 1$);

(2) $1+3+6+\cdots+\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$;

(3) $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$;

(4) $1-\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x(x-1)}{2!}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}$

$=(-1)^n\dfrac{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}{n!}$.

2. 用数学归纳法, 证明:

(1) 如果一个数列的首项是 a,并且从第二项起的每一项都等于前一项除以这一项的项数,那末它的第 n 项一定是 $\frac{a}{n!}$;

(2) 如果一个数列的第 1 项是 $a_1=1$; 并且从第二项起, 相邻两项间有下面的关系:

$$a_n=3a_{n-1}+2 \quad (n\geqslant 2),$$

那末这个数列的通项公式一定是

$$a_n=\frac{3^n+3^{n-1}-2}{2}.$$

3. 要使不等式

$$2^n>2n+1$$

成立, n 可取哪些自然数的值?

第三章　二项式定理

在本丛书代数第一册里，曾经讲过二项式 $a+b$ 的平方公式和立方公式．本章将导出二项式 $a+b$ 的任何正整数次幂的公式——二项式定理，并研究二项展开式的一些性质以及它们的应用．

§3·1　杨辉三角形

我们已经知道：

$$(a+b)^1=a+b;$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2;$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

对于 $a+b$ 的其他正整数次幂，是不是也可以不通过乘法运算，直接把它的展开式写出来呢？

不妨再进行一些计算，得到 $a+b$ 的 4、5、6 次幂是：

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4;$$
$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5;$$
$$(a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6.$$

现在来观察这些展开式里各项的字母因式，从中发现一些特点．

如把展开式中单独由一个字母 a(或者 b)的幂构成的项，看作是这个字母的幂与另一个字母的零次幂的积(例如，把 a^4 看成 a^4b^0，b^4 看成 a^0b^4)，那末，可以看出，这些展开式里各项

的字母因式有两个重要的特点:

1° 展开式的每一项中，字母 a 与 b 的幂指数的和，恰巧都等于左边二项式 $a+b$ 的幂指数.

2° 展开式里，字母 a 的幂指数是逐项减小的，第一项中的指数与左边二项式 $a+b$ 的幂指数相同，以后便逐项依次减少 1，直到 0 为止；字母 b 的幂指数是逐项增大的，第一项中的指数是 0，以后便逐项依次增加 1，直到与左边的二项式的幂指数相同为止.

把这两个特点概括起来说，也就是：二项式 $a+b$ 的 n 次幂(这里 $n=1, 2, \cdots, 6$)的展开式是按照字母 a 的降幂而排列的、关于字母 a 和 b 的 n 次齐次式.

进一步来考察，展开式里各项系数间的关系，看有什么特殊的组成规律. 为此，把它们的系数分别列成下表的形式:

$$
\begin{array}{ll}
(a+b)^1 & \begin{array}{ccccccccccccc} &&&&&1&&1&&&&& \\ &&&&&&\vee&&&&&& \end{array} \\
(a+b)^2 & \begin{array}{ccccccccccccc} &&&&1&&2&&1&&&& \\ &&&&&\vee&&\vee&&&&& \end{array} \\
(a+b)^3 & \begin{array}{ccccccccccccc} &&&1&&3&&3&&1&&& \\ &&&&\vee&&\vee&&\vee&&&& \end{array} \\
(a+b)^4 & \begin{array}{ccccccccccccc} &&1&&4&&6&&4&&1&& \\ &&&\vee&&\vee&&\vee&&\vee&&& \end{array} \\
(a+b)^5 & \begin{array}{ccccccccccccc} &1&&5&&10&&10&&5&&1& \\ &&\vee&&\vee&&\vee&&\vee&&\vee&& \end{array} \\
(a+b)^6 & \begin{array}{ccccccccccccc} 1&&6&&15&&20&&15&&6&&1 \end{array}
\end{array}
$$

从这表可以看出，二项式 $a+b$ 的各次幂的首末两项的系数都是 1，而中间各项的系数恰巧都等于它的肩上两个数(就是上一行中位于它的上方的两个数)的和. 例如，$(a+b)^4$ 的展开式中各项的系数：首末两项都是 1，从第二项起的中间各项系数 4、6、4，顺次是它的肩上两数 1 与 3、3 与 3、3 与 1 的和.

倘使继续把 $(a+b)^7$、$(a+b)^8$ 的展开式写出，可以发现它

们的展开式也同样具有上面所说的这些特点．例如

$$(a+b)^7=a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3 +35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7;$$

$$(a+b)^8=a^8+8a^7b+28a^6b^2+56a^5b^3 +70a^4b^4+56a^3b^5+28a^2b^6+8ab^7+a^8.$$

早在1261年，我国宋朝数学家杨辉所著的“详解九章算术”一书里就已经出现了上述形式的表．由于这个表的外形很象一个三角形(如果上面再加上 $a+b$ 的零次幂的系数1的话)，所以把它称为**杨辉三角形**．

应用杨辉三角形，可以写出 $a+b$ 的任意正整数次幂的展开式，方法是：

先根据二项式 $a+b$ 的幂的指数，写出次数与它相同的关于字母 a 和 b 的齐次式；

再根据杨辉三角形中相应这一行的各数，顺次写出展开式中各项的系数．

注　杨辉曾经指出，他这个方法出于“释锁算术”，并且说，我国古代数学家贾宪已经用过它．所以，我国发现这个表不迟于十一世纪．在欧洲，认为这个表是法国数学家巴斯加(1623～1662)首先发现的，把它称作“巴斯加三角形”，其实比我国要迟500年左右．

例1． 写出 $(2x-3y)^5$ 的展开式．

分析　把 $2x$ 看成是 a，$-3y$ 看成是 b，代入 $(a+b)^5$ 的展开式，然后把它化简即可．

【解】

$$\begin{aligned}(2x-3y)^5&=[(2x)+(-3y)]^5\\&=(2x)^5+5(2x)^4(-3y)\\&\quad+10(2x)^3(-3y)^2+10(2x)^2(-3y)^3\\&\quad+5(2x)(-3y)^4+(-3y)^5\\&=32x^5-240x^4y+720x^3y^2-1080x^2y^3\\&\quad+810xy^4-243y^5.\end{aligned}$$

例 2. 求$\left(3a+\dfrac{2}{3}\right)^6$的展开式中 a^4 的系数.

分析 只要把$\left(3a-\dfrac{2}{3}\right)^6$的展开式写到含有 a^4 的一项，那末这项的系数即是所求.

【解】

$$\left(3a+\frac{2}{3}\right)^6=(3a)^6+6(3a)^5\left(\frac{2}{3}\right)+15(3a)^4\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots.$$

所以,所求 a^4 的系数是

$$15\times 3^4\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=15\times 81\times\frac{4}{9}=540.$$

习　题　3·1

1. 写出:

(1) $(a+b)^9$ 的展开式的前 5 项;

(2) $(a+b)^{10}$ 的展开式的前 6 项.

2. 应用杨辉三角形,展开:

(1) $(2x-y)^5$;

(2) $(2x+y)^5$.

比较这两个展开式里的各同类项的系数，可以看出它们之间有怎样的关系?

3. (1) 求$(2-x)^7$ 的展开式中 x^3 的系数;

(2) 求$\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^6$的展开式中的常数项.

4. 根据杨辉三角形,指出:

(1) $(a+b)^3$, $(a+b)^5$, $(a+b)^7$ 的展开式中系数最大的项分别是第几项?

(2) $(a+b)^2$, $(a+b)^4$, $(a+b)^6$, $(a+b)^8$ 的展开式中系数最大的项分别是第几项?

从上面的观察中,可以发现:在 $(a+b)^n$ 的展开式中,系数最大的项的项数 k 与 n 间有怎样的关系?

5. 根据杨辉三角形，计算$(a+b)^2$，$(a+b)^3$，$(a+b)^4$，$(a+b)^5$ 的展开式中各项的系数的和是什么？由此可以发现，$(a+b)^n$ 的展开式中各项系数的和与指数 n 间有怎样的关系？

§3·2 二项式定理

应用杨辉三角形来确定$(a+b)^n$的展开式中各项的系数，首先要知道$(a+b)^{n-1}$的展开式中各项的系数．为此，又得先知道$(a+b)^{n-2}$的展开式中各项的系数；这样逐步倒推上去．例如，要确定$(a+b)^{14}$的展开式中各项的系数，在第 60 页这个表的基础上，还必须继续顺次写出$(a+b)^7$，$(a+b)^8$，…，$(a+b)^{13}$，$(a+b)^{14}$的展开式中各项的系数．自然，这样做是比较麻烦的．

现在进一步来研究展开式中各项的系数与指数n间有怎样的关系，从而找出一个能够直接写出$(a+b)^n$的展开式中各项的系数的法则．为此，先来研究下面这个问题．

问题　求$(a+b_1)(a+b_2)(a+b_3)\cdots(a+b_n)$的展开式．

对这个问题，可以利用第二章学过的知识，用数学归纳法来解．

首先，直接进行计算，求出$n=2$、3、4 时的展开式：

$$(a+b_1)(a+b_2)$$
$$=a^2+(b_1+b_2)a+b_1b_2;$$
$$(a+b_1)(a+b_2)(a+b_3)$$
$$=a^3+(b_1+b_2+b_3)a^2+(b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3)a+b_1b_2b_3;$$
$$(a+b_1)(a+b_2)(a+b_3)(a+b_4)$$
$$=a^4+(b_1+b_2+b_3+b_4)a^3$$
$$+(b_1b_2+b_1b_3+b_1b_4+b_2b_3+b_2b_4+b_3b_4)a^2$$
$$+(b_1b_2b_3+b_1b_2b_4+b_1b_3b_4+b_2b_3b_4)a+b_1b_2b_3b_4.$$

可以看出，展开式有下面的特点：

展开式是字母 a 按降幂排列的多项式，a 的最高项的次数与乘积中因式的个数相同；

展开式中最高项的系数是1，后一项的系数是因式中各个常数项 $b_1, b_2, b_3, \cdots$ 的代数和；再后一项是因式中各个常数项 $b_1, b_2, b_3, \cdots$ 中每次取2个作出的所有不同的积的代数和……；最后一项是各个因式中各个常数项的积.

根据上面这两个特点，可以归纳出一个结论：

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{(a+b_1)(a+b_2)(a+b_3)\cdots(a+b_n)}\\
&\quad\boldsymbol{=a^n+(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n)a^{n-1}}\\
&\qquad\boldsymbol{+(b_1b_2+b_1b_3+\cdots+b_1b_n}\\
&\qquad\qquad\boldsymbol{+b_2b_3+\cdots+b_2b_n+\cdots+b_{n-1}b_n)a^{n-2}}\\
&\qquad\boldsymbol{+\cdots}\\
&\qquad\boldsymbol{+b_1b_2b_3\cdots b_n.}
\end{aligned}\tag{1}$$

进一步，应用数学归纳法，证明这个结论对任意大于1的自然数 n 都成立.

1° 当 $n=2$ 时，从上面的计算可知式(1)是成立的；

2° 假设当 $n=k$ 时式(1)成立，即

$$\begin{aligned}
&(a+b_1)(a+b_2)(a+b_3)\cdots(a+b_{k-1})(a+b_k)\\
&\quad=a^k+(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{k-1}+b_k)a^{k-1}\\
&\qquad+(b_1b_2+b_1b_3+\cdots+b_1b_k\\
&\qquad\qquad+b_2b_3+\cdots+b_2b_k+\cdots+b_{k-1}b_k)a^{k-2}\\
&\qquad+\cdots\\
&\qquad+b_1b_2b_3\cdots b_{k-1}b_k.
\end{aligned}\tag{2}$$

为了书写简单起见，设

$$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{k-1}+b_k=s_1,$$

$$b_1b_2+b_1b_3+\cdots+b_1b_k+b_2b_3+\cdots+b_2b_k+\cdots+b_{k-1}b_k=s_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$b_1b_2b_3\cdots b_{k-1}b_k=s_k.$$

式(2)可以写成:

$$(a+b_1)(a+b_2)(a+b_3)\cdots(a+b_{k-1})(a+b_k)$$
$$=a^k+s_1a^{k-1}+s_2a^{k-2}+\cdots+s_k. \tag{3}$$

当 $n=k+1$ 时,可以推得:

$$\begin{aligned}&(a+b_1)(a+b_2)(a+b_3)\cdots(a+b_{k-1})(a+b_k)(a+b_{k+1})\\&=(a^k+s_1a^{k-1}+s_2a^{k-2}+\cdots+s_k)(a+b_{k+1})\\&=a^{k+1}+(s_1+b_{k+1})a^k+(s_2+b_{k+1}s_1)a^{k-1}\\&\quad+\cdots+b_{k+1}s_k.\end{aligned} \tag{4}$$

但是

$$s_1+b_{k+1}=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_k+b_{k+1},$$

它就是 $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_{k+1}$ 这 $k+1$ 个常数的代数和.

$$\begin{aligned}s_2+b_{k+1}s_1=&(b_1b_2+b_1b_3+\cdots+b_1b_k\\&+b_2b_3+\cdots+b_2b_k+\cdots+b_{k-1}b_k)\\&+b_{k+1}(b_1+b_2+\cdots+b_k)\\=&b_1b_2+b_1b_3+\cdots+b_1b_k+b_1b_{k+1}\\&+b_2b_3+\cdots+b_2b_k+b_2b_{k+1}\\&+\cdots\\&+b_kb_{k+1},\end{aligned}$$

它就是 $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_{k+1}$ 这 $k+1$ 个常数中每两个乘积的代数和.

$\cdots\cdots$

最后可推得

$$b_{k+1}\cdot s_k=b_1b_2b_3\cdots b_kb_{k+1},$$

它就是 $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_{k+1}$ 这 $k+1$ 个常数的积.

因此,式(4)可以写成:

$$
\begin{aligned}
&(a+b_1)(a+b_2)(a+b_3)\cdots(a+b_k)(a+b_{k+1})\\
&\quad=a^{k+1}+(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{k+1})a^k\\
&\qquad\quad+(b_1b_2+b_1b_3+\cdots+b_1b_{k+1}\\
&\qquad\quad+b_2b_3+\cdots+b_2b_{k+1}+\cdots+b_kb_{k+1})a^{k-1}\\
&\qquad\quad+\cdots\\
&\qquad\quad+b_1b_2b_3\cdots b_{k+1}.
\end{aligned}
$$

这也就表明，当 $n=k+1$ 时，式(1)也是成立的.

这样，根据 1° 和 2°，就可以断言：式(1)对于任意大于 1 的自然数 n 都是成立的.

例 1． 计算 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)$.

【解】 所求的积是 x 的 5 次式，其中：

x^5 的系数 $=1$,

x^4 的系数 $=1+2+3+4+5=15$,

$$
\begin{aligned}
x^3\text{ 的系数}&=1\cdot2+1\cdot3+1\cdot4+1\cdot5\\
&\quad+2\cdot3+2\cdot4+2\cdot5\\
&\quad+3\cdot4+3\cdot5\\
&\quad+4\cdot5\\
&=2+9+24+50=85,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x^2\text{ 的系数}&=1\cdot2\cdot3+1\cdot2\cdot4+1\cdot2\cdot5+1\cdot3\cdot4+1\cdot3\cdot5+1\cdot4\cdot5\\
&\quad+2\cdot3\cdot4+2\cdot3\cdot5+2\cdot4\cdot5\\
&\quad+3\cdot4\cdot5\\
&=6+8+10+36+45+120=225,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x\text{ 的系数}&=1\cdot2\cdot3\cdot4+1\cdot2\cdot3\cdot5+1\cdot2\cdot4\cdot5+1\cdot3\cdot4\cdot5\\
&\quad+2\cdot3\cdot4\cdot5\\
&=24+30+40+180=274,
\end{aligned}
$$

常数项 $=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120$.

所以，所求的积是

$$x^5+15x^4+85x^3+225x^2+274x+120.$$

习 题 3·2(1)

应用上面所得出的公式，直接写出下列各题的结果：

1. $(x+2)(x+3)(x+4)$.
2. $(x-1)(x-2)(x-3)$.
3. $(x+1)(x+2)(x-3)(x-4)$.
4. $(x-2)(x+3)(x+1)(x-4)$.

有了计算二项式乘积的公式，就容易推出二项式 $a+b$ 的 n 次幂的公式. 为此，只需把(1)式中的 $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n$ 都改成 b. 这时，(1)式的左边就可以写成 $(a+b)^n$ 的形式，而右边各项的系数就有以下的规律：

a^n 的系数仍旧是 1；

a^{n-1} 的系数 $b_1+b_2+\cdots+b_n$ 是 n 个 b 的和，所以 a^{n-1} 的系数是 nb（也就是 $C_n^1 b$）；

a^{n-2} 的系数 $b_1b_2+b_1b_3+\cdots+b_{n-1}b_n$ 的各项都变成 b^2，它的项数等于 n 个元素中每次取 2 个元素的所有组合的种数 C_n^2，所以 a^{n-2} 的系数是 $C_n^2 b^2$；

同理，a^{n-3} 的系数是 $C_n^3 b^3$；a^{n-4} 的系数是 $C_n^4 b^4$；…；a^{n-k} 的系数是 $C_n^k b^k$；…；最后一项 $b_1b_2\cdots b_n$ 变成了 b^n.

这样，原来的等式就变成

$$\begin{aligned}(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2\\+\cdots+C_n^ka^{n-k}\cdot b^k+\cdots+b^n.\end{aligned}$$

这个公式通常称为**二项式定理**. 右边的式子称为 $(a+b)^n$ 的二项展开式.

为了写法上的一致，用 C_n^0 和 C_n^n 来分别表示 a^n 和 b^n 的系数 1，这时上面的公式就可以写成

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots$$
$$+C_n^ka^{n-k}b^k+\cdots+C_n^nb^n.$$

这里的 $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \cdots, C_n^k, \cdots, C_n^n$ 称为二项展开式的系数，或称为二项系数.

例 2. 写出 $(1+x)^{15}$ 的展开式的前 4 项.

【解】 $(1+x)^{15}=1+C_{15}^1x+C_{15}^2x^2+C_{15}^3x^3+\cdots$
$$=1+15x+105x^2+455x^3+\cdots,$$

所以，展开式的前 4 项是 $1+15x+105x^2+455x^3$.

例 3. 写出 $\left(2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的展开式.

【解】 $\left(2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$

$$=\left(\frac{2x+1}{\sqrt{x}}\right)^6$$

$$=\frac{1}{x^3}(2x+1)^6$$

$$=\frac{1}{x^3}[(2x)^6+C_6^1(2x)^5+C_6^2(2x)^4$$
$$+C_6^3(2x)^3+C_6^4(2x)^2+C_6^5(2x)+C_6^6]$$

$$=\frac{1}{x^3}(64x^6+6\cdot32x^5+15\cdot16x^4$$
$$+20\cdot8x^3+15\cdot4x^2+6\cdot2x+1)$$

$$=\frac{1}{x^3}(64x^6+192x^5+240x^4+160x^3$$
$$+60x^2+12x+1)$$

$$=64x^3+192x^2+240x+160+\frac{60}{x}+\frac{12}{x^2}+\frac{1}{x^3}.$$

说明 1. 在熟练以后；中间步骤可以省去一些.

2. 对于这类问题，当幂指数较小时，可以应用杨辉三角形直接把各项系数写出.

习 题 3·2(2)

1. 应用二项式定理,展开:

(1) $\left(\frac{x^2}{2}+\frac{3}{x}\right)^8$; (2) $(a+\sqrt[3]{b})^9$;

(3) $(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^5$; (4) $(x-3)^6$.

[提示: $x-3=x+(-3)$.]

2. 应用二项式定理,写出:

(1) $(1+2x)^{17}$ 的展开式的前三项;

(2) $\left(\frac{\sqrt{x}}{3}+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的展开式的前四项.

3. 化简:

(1) $(2x-1)^5+(2x+1)^5$;

(2) $\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)^6-\left(\frac{x}{2}-\frac{2}{x}\right)^6$.

§3·3 二项展开式的通项公式

上节导出了二项式定理:

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^ka^{n-k}b^k+\cdots+C_n^nb^n.$$

可以看出,二项展开式具有以下特点:

它是按照字母 a 的降幂排列的、关于字母 a、b 的 n 次完全齐次式.

展开式里一共有 $n+1$ 项.

展开式里各项的系数顺次是

$$C_n^0,\ C_n^1,\ C_n^2,\ \cdots,\ C_n^k,\ \cdots,\ C_n^n;$$

其中 C_n^k 是第 $k+1$ 项($k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$)的系数.

展开式的第 $k+1$ 项是

$$T_{k+1}=C_n^k a^{n-k} b^k.$$

这个公式称为二项展开式的**通项公式**. 利用这公式可以直接写出展开式中某一指定的项.

例 1. 求 $(x+a)^{12}$ 的展开式中的第 4 项和倒数第 4 项.

【解】 这里, 通项公式是

$$T_{k+1}=C_{12}^k x^{12-k} a^k.$$

于是

$$\begin{aligned}T_4=T_{3+1}&=C_{12}^3 x^{12-3}\cdot a^3\\&=\frac{12\cdot 11\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3}x^9\cdot a^3\\&=220a^3x^9.\end{aligned}$$

又, 展开式中共有 $12+1=13$ 项, 其倒数第 4 项也就是第 10 项, 由此得

$$T_{10}=T_{9+1}=C_{12}^9 x^{12-9}\cdot a^9=C_{12}^3 x^3 a^9=220a^9x^3.$$

注 可以看到, 在 $(x+a)^{12}$ 的展开式中, 第 4 项与倒数第 4 项的系数是相同的. 想一想: 在这个展开式里, 第 1、2、3、5、6 项与倒数第 1、2、3、5、6 项的系数是不是也顺次分别相同? 为什么?

例 2. 求 $\left(\frac{x^2}{3}+\frac{2}{x}\right)^8$ 的展开式里中间一项的系数.

【解】 这里 $n=8$, 展开式共有 9 项. 所以中间的一项是第 5 项. 今

$$\begin{aligned}T_5=T_{4+1}&=C_8^4\left(\frac{x^2}{3}\right)^4\left(\frac{2}{x}\right)^4\\&=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{2^4}{3^4}\cdot x^4\\&=\frac{70\cdot 16}{81}x^4=\frac{1120}{81}x^4.\end{aligned}$$

由此可知, 中间一项的系数是 $13\frac{67}{81}$.

注意 按照题意, 求展开式的中间一项 $\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{2^4}{3^4}x^4$ 的系数,

所以，这一项里所有关于 x 的数字系数部分都要计算进去. 不要误解成只求二项系数 C_8^4.

习 题 3·3(1)

1. (1) 求 $(a+\sqrt{b})^{12}$ 的展开式里的第 4 项和第 9 项;

(2) 求 $(2x+3y)^{10}$ 的展开式里的第 3 项和倒数第 3 项.

2. (1) 求 $(x+a)^{12}$ 的展开式里的中间的一项;

(2) 求 $\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)^7$ 的展开式里的中间两项.

3. 求 $(x+a)^9$ 的展开式里第 2 项与倒数第 2 项；第 3 项与倒数第 3 项；第 4 项与倒数第 4 项的数字系数.

比较一下所求得的数字系数是否两两相等.

应用二项展开式的通项公式，还可以解一些比较复杂的问题，下面举例来说明.

例 3. 求 $\left(\frac{\sqrt{x}}{4}+\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^{11}$ 的展开式里 x^3 的系数. 这个展开式里有没有不含 x 的项？如果有，把这一项求出.

分析 这里并没有直接告诉我们所求的是哪一项，我们把 k 作为未知数，根据题意，并应用通项公式

$$T_{k+1}=C_{11}^k\left(\frac{\sqrt{x}}{4}\right)^{11-k}\left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^k,$$

导出一个关于 k 的方程. 这样，解这个方程，求出 $k(k=0, 1, 2, \cdots, 11)$ 代入上式即得.

【解】 这里，二项展开式的第 $k+1$ 项是

$$\begin{aligned}T_{k+1}&=C_{11}^k\left(\frac{\sqrt{x}}{4}\right)^{11-k}\left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^k\\&=C_{11}^k\frac{3^k}{4^{11-k}}\cdot x^{\frac{11-k}{2}-\frac{k}{3}}\\&=C_{11}^k\frac{3^k}{4^{11-k}}x^{\frac{33-5k}{6}}.\end{aligned}$$

首先，令 $\frac{33-5k}{6}=3$，得 $33-5k=18$，即得 $k=3$. 所以，所求含有 x^3 的项是第 4 项，这一项的系数是

$$C_{11}^3\cdot\frac{3^3}{4^8}=\frac{11\cdot10\cdot9}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{27}{65536}$$

$$=\frac{4455}{65536}.$$

其次，令 $\frac{33-5k}{6}=0$，得 $33-5k=0$，这个方程没有整数解. 所以，展开式里没有不含 x 的项.

例 4. 在$\left(a+\frac{1}{a}\right)^{2n}$的展开式里，已知其第 4 项与第 6 项的系数相等，求展开式里不含 a 的项.

分析 这里，先要根据题中第一个条件确定 n 的值，然后就可仿照上题确定展开式里不含 a 的项究竟是哪一项，从而求出结果.

【解】 这里 $T_4=C_{2n}^3a^{2n-3}\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^3=C_{2n}^3a^{2n-6}$;

$$T_6=C_{2n}^5a^{2n-5}\left(\frac{1}{a}\right)^5=C_{2n}^5a^{2n-10}.$$

根据题设条件：T_4 与 T_6 的系数相同，得

$$C_{2n}^3=C_{2n}^5.$$

但

$$C_{2n}^3=C_{2n}^{2n-3},$$

故得

$$C_{2n}^5=C_{2n}^{2n-3}.$$

$$\therefore\quad 5=2n-3,$$

$$n=4.$$

由此知，所给的式子就是$\left(a+\frac{1}{a}\right)^8$. 它的第 $k+1$ 项是

$$T_{k+1}=C_8^ka^{8-k}\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^k$$

$$=C_8^ka^{8-2k}.$$

欲求不含 a 的项，只须令 $8-2k=0$，即得 $k=4$。代入上式，得

$$T_5=C_8^4\cdot a^0=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=70.$$

所以，展开式里不含 a 的项是 70.

习　题　3·3(2)

1. 在 $(x+a)^{19}$ 的展开式里，求：

(1) 含有 a^8 的项；　　(2) 含有 x^8 的项.

2. 在 $\left(x^2+\dfrac{1}{x^3}\right)^{15}$ 的展开式里，有没有

(1) 不含 x 的项？　　(2) 含有 x^8 的项？

如果有，把这个项求出来.

3. 求 $\left(3x+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^8$ 的展开式里的常数项.

4. 已知 $\left(\sqrt[8]{a^2}+\dfrac{1}{a}\right)^n$ 的展开式里的第 3 项含有 a^2，求 n.

§3·4　二项展开式中系数间的关系

仔细观察一下，第 60 页的杨辉三角形中的这些二项系数，可以发现这些系数间存在着一些特殊的关系，如：

(1) 与两端等距离的一对系数分别相等；

(2) 当二项式的幂指数是偶数时，处在中间位置的一个系数最大；是奇数时，处在中间位置的两个相同的系数最大.

现在来证明，不论 n 是什么自然数，$(a+b)^n$ 的二项展开式的系数间都有这样的关系.

(1) 在二项展开式里，和两端等距离的两项的系数相等.

【证】 二项展开式里，各项的系数顺次是

$$C_n^0,\ C_n^1,\ C_n^2,\ \cdots,\ C_n^k,\ \cdots,\ C_n^{n-2},\ C_n^{n-1},\ C_n^n.$$

这里，C_n^0 与 C_n^n，C_n^1 与 C_n^{n-1}，C_n^2 与 C_n^{n-2}，…分别是与两端等距离的两项的系数.

$$\because\quad C_n^0=1,\ C_n^n=1,\quad \therefore\quad C_n^0=C_n^n.$$

根据组合的性质

$$C_n^m=C_n^{n-m},$$

可以得出

$$C_n^1=C_n^{n-1},\ C_n^2=C_n^{n-2},\ \cdots.$$

这样，命题就得到了证明.

(2) 当 n 是偶数时，二项展开式中第 $\frac{n}{2}+1$ 项的系数有最大值；当 n 是奇数时，二项展开式中第 $\frac{n+1}{2}$ 项的系数和第 $\frac{n+1}{2}+1$ 项的系数有相同的最大值.

【证】 二项展开式中各项的系数顺次是

$$C_n^0=1,\quad C_n^1=n,$$

$$C_n^2=\frac{n(n-1)}{1\cdot2},\quad C_n^3=\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3},$$

$$C_n^4=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4},\quad \cdots.$$

这里，从前一项的系数到后一项的系数，分子是乘以逐渐减小 1 的数(如 n, $n-1$, $n-2$, …)，分母是乘以逐渐增大 1 的数(如 1, 2, 3, …). 因此，一个二项展开式各项的系数，开始时总是逐渐增大(当分子上的乘数大于分母上的乘数时)，但到了一定项(当分子上的乘数小于分母上的乘数时)，就要逐渐减小. 因为和两端等距离的两项系数分别相等，所以系数最大的项必定在中间. 由此可知：

当 n 为偶数时，展开式共有 $n+1$ 项($n+1$ 为奇数)，中间

的一项是第 $\frac{n}{2}+1$ 项，这一项具有最大的系数.

当 n 为奇数时，展开式共有 $n+1$ 项($n+1$ 为偶数)，中间项有两个，就是第 $\frac{n+1}{2}$ 项与第 $\frac{n+1}{2}+1$ 项，这两项具有相同的最大的系数.

上面的证明中，指出二项展开式中相邻两项的系数间有着一个特定的关系：

$$C_n^{k+1}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)(n-k)}{1\cdot2\cdot3\cdots k(k+1)}$$

$$=\frac{n-k}{k+1}C_n^k.$$

这里，$n-k$ 恰巧是第 $k+1$ 项中 a 的幂指数. 由此可知，二项展开式的系数还具有下面这一性质：

(3) 展开式里，从第 2 项起的系数，等于它的前一项的系数乘以这一项中 a 的幂指数、再除以前一项的项数.

根据上面这些性质，在展开 $(a+b)^n$ 时，就可以不必去逐个计算二项系数 C_n^0, C_n^1, C_n^2, $\cdots$ 的值，而直接把这些系数求出.

例如，要展开 $(a+b)^{11}$，根据(3)，只需先把它的前 6 项写出，得

$$(a+b)^{11}=a^{11}+\underset{\substack{\uparrow\\(1\times11)}}{11}a^{10}b+\underset{\substack{\uparrow\\(11\times\frac{10}{2})}}{55}a^9b^2+\underset{\substack{\uparrow\\(55\times\frac{9}{3})}}{165}a^8b^3$$

$$+\underset{\substack{\uparrow\\(165\times\frac{8}{4})}}{330}a^7b^4+\underset{\substack{\uparrow\\(330\times\frac{7}{5})}}{462}a^6b^5+\cdots.$$

由此，再根据(1)，就可把后面的 6 项写出，得

$$(a+b)^{11}=a^{11}+11a^{10}b+55a^9b^2+165a^8b^3$$

$$+330a^7b^4+462a^6b^5+462a^5b^6+330a^4b^7$$

$$+165a^3b^8+55a^2b^9+11ab^{10}+b^{11}.$$

例 1. 展开$\left(2x-\frac{1}{2}y\right)^8$.

分析 把 $2x$ 看成 a, $-\frac{1}{2}y$ 看成 b. 就可以应用 $(a+b)^8$ 的二项展开式来展开.

【解】 $\left(2x-\frac{1}{2}y\right)^8$

$$
\begin{aligned}
&=\left[(2x)+\left(-\frac{1}{2}y\right)\right]^8\\
&=(2x)^8+8(2x)^7\left(-\frac{1}{2}y\right)\\
&\quad+28(2x)^6\left(-\frac{1}{2}y\right)^2+56(2x)^5\left(-\frac{1}{2}y\right)^3\\
&\quad+70(2x)^4\left(-\frac{1}{2}y\right)^4+56(2x)^3\left(-\frac{1}{2}y\right)^5\\
&\quad+28(2x)^2\left(-\frac{1}{2}y\right)^6+8(2x)\left(-\frac{1}{2}\right)^7\\
&\quad+\left(-\frac{1}{2}y\right)^8\\
&=256x^8-512x^7y+448x^6y^2-224x^5y^3\\
&\quad+70x^4y^4-14x^3y^5+\frac{7}{4}x^2y^6\\
&\quad-\frac{1}{8}xy^7+\frac{1}{256}y^8.
\end{aligned}
$$

注意 这里，最后求到的展开式里，与两端等距离的两项的两个系数并不相等，中间一项的系数也不是最大系数，请读者想一想，这是为什么？

例 2. 应用二项式定理，展开$(1+x+x^2)^4$.

分析 把 $1+x$ 看成 a, x^2 看成 b, 就可以应用 $(a+b)^4$ 的二项展开式展开.

【解】 $(1+x+x^2)^4=[(1+x)+x^2]^4$

$$=(1+x)^4+4(1+x)^3\cdot x^2+6(1+x)^2(x^2)^2+4(1+x)\cdot(x^2)^3+(x^2)^4$$

$$\begin{aligned}=1+4x+\ 6x^2+\ 4x^3+\ x^4&\\ +\ 4x^2+12x^3+12x^4+\ 4x^5&\\ +\ 6x^4+12x^5+\ 6x^6&\\ +\ 4x^6+4x^7+x^8&\end{aligned}$$

$$=1+4x+10x^2+16x^3+19x^4+16x^5+10x^6+4x^7+x^8.$$

习 题 3·4

1．求二项展开式里系数最大的项(系数只需用组合数符号表示，不必算出)：

(1) $(a+b)^{10}$； (2) $(1+x)^{17}$.

2．应用二项展开式系数间的关系，展开

(1) $\left(\frac{x^2}{y}+\frac{y}{x^2}\right)^9$； (2) $\left(x+\frac{2}{x}\right)^7$.

3．应用二项式定理，展开：

(1) $(x^2+x+2)^5$； (2) $(x^2+2x+1)^5$.

[提示：(2) $x^2+2x+1=(x+1)^2$.]

4．$(a+b)^{2n}$ 的展开式里如果第5项的系数与第13项的系数相等，求展开式里系数最大的项(系数用组合符号表示，不必算出)．

[提示：先确定 n 的值.]

§3·5 $(a-b)^n$ 的展开式

在§3·2已经看到，凡是可以化成 $(a+b)^n$ 形式的式子，都可以应用二项式定理来展开．为了应用上的方便，现在来导出 $(a-b)^n$ 的展开式．显然，所求的展开式，只需在 $(a+b)^n$ 的展开式里，用 $-b$ 来代替 b 就可以了．

因为

$$
\begin{aligned}
(a-b)^n &= [a+(-b)]^n \\
&= C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}(-b) + C_n^2a^{n-2}(-b)^2 + \cdots \\
&\quad + C_n^ka^{n-k}(-b)^k + \cdots \\
&\quad + C_n^{n-2}a^2(-b)^{n-2} + C_n^{n-1}a(-b)^{n-1} + C_n^n(-b)^n \\
&= C_n^0a^n - C_n^1a^{n-1}b + C_n^2a^{n-2}b^2 + \cdots \\
&\quad + (-1)^kC_n^ka^{n-k}b^k + \cdots + (-1)^nC_n^nb^n.
\end{aligned}
$$

这样,就得到了$(a-b)^n$的二项展开式

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^n = \boldsymbol{C}_n^0\boldsymbol{a}^n - \boldsymbol{C}_n^1\boldsymbol{a}^{n-1}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{C}_n^2\boldsymbol{a}^{n-2}\boldsymbol{b}^2 + \cdots \\
+ (-\mathbf{1})^k\boldsymbol{C}_n^k\boldsymbol{a}^{n-k}\boldsymbol{b}^k + \cdots + (-\mathbf{1})^n\boldsymbol{C}_n^n\boldsymbol{b}^n.
\end{aligned}
$$

它的通项公式是

$$\boldsymbol{T}_{k+1} = (-\mathbf{1})^k\boldsymbol{C}_n^k\boldsymbol{a}^{n-k}\boldsymbol{b}^k.$$

很明显的,对于$(a-b)^n$的二项展开式,除去各项是正负相间以外,其他都和$(a+b)^n$的二项展开式相同.

例 1. 求$(a+\sqrt{b})^5+(a-\sqrt{b})^5$的展开式.

【解】

$$
\begin{aligned}
&(a+\sqrt{b})^5+(a-\sqrt{b})^5 \\
&= [C_5^0a^5 + C_5^1a^4(\sqrt{b}) + C_5^2a^3(\sqrt{b})^2 \\
&\quad + C_5^3a^2(\sqrt{b})^3 + C_5^4a(\sqrt{b})^4 + C_5^5(\sqrt{b})^5] \\
&\quad + [C_5^0a^5 - C_5^1a^4(\sqrt{b}) + C_5^2a^3(\sqrt{b})^2 \\
&\quad - C_5^3a^2(\sqrt{b})^3 + C_5^4a(\sqrt{b})^4 - C_5^5(\sqrt{b})^5] \\
&= 2C_5^0a^5 + 2C_5^2a^3(\sqrt{b})^2 + 2C_5^4a(\sqrt{b})^4 \\
&= 2a^5 + 20a^3b + 10ab^2.
\end{aligned}
$$

例 2. 求$\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}\right)^{13}$展开式里系数最大的项.

分析 $(a-b)^n$的展开式里,因各项的系数除掉符号外都与$(a+b)^n$的展开式里相应的项的系数完全相同,所以仍可应用 §3·4 里的(2),先求出系数绝对值最大的项,再选择其中系数是正数的一个.

【解】 展开式里，系数绝对值最大的项有两个，就是 T_7 与 T_8，其中 T_7 的系数是正数，所以所求的是展开式里的第 7 项．即

$$T_7=T_{6+1}=(-1)^6C_{13}^6\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^7\left(\frac{y}{x}\right)^6=\frac{1716x}{y}.$$

习 题 3·5

1．展开：

(1) $(x-2)^8$； (2) $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^7$.

2．写出：

(1) $(\sqrt{3}-\sqrt[3]{2})^6$ 展开式里的第 5 项；

(2) $\left(x^2-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$ 展开式里系数绝对值最大的项．

3．求 $(1+x+x^2)^5\cdot(1-x)^5$ 展开式里的中间的项．

[提示：$(1+x+x^2)(1-x)=1-x^3$.]

§3·6 二项展开式里各项系数的和

在第 60 页的杨辉三角形里，把每一横行里的各个系数相加，可以发现二项展开式各项系数的和，有一个重要的特点：

$(a+b)^1$ $1+1=2=2^1$,

$(a+b)^2$ $1+2+1=4=2^2$,

$(a+b)^3$ $1+3+3+1=8=2^3$,

$(a+b)^4$ $1+4+6+4+1=16=2^4$,

……… ………………………………

由此，可以归纳出

$(a+b)^n$ 展开式里各项系数的和等于 2^n.

对于这个命题，只需在公式

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots$$
$$+C_n^ka^{n-k}b^k+\cdots+C_n^nb^n$$

里，令 $a=b=1$，即得证明.

在二项展开式各项系数的和的公式

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^k+\cdots+C_n^n=2^n$$

里，两边都减去 C_n^0，并用 1 来代替 C_n^0，即得

$$\boldsymbol{C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^k+\cdots+C_n^n=2^n-1}.$$

这个公式指出：在 n 个相异元素里，每次取 1 个、2 个、…、k 个、…、n 个元素的所有组合种数的和，等于 2 的 n 次幂减去 1，因此它通常称为**组合总数公式**.

例 1. 求证 $(a+b)^n$ 的展开式中，各奇数项系数的和与各偶数项系数的和相等，并且这个和就是 2^{n-1}.

分析 这就是要证明 $C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots$. 为此，只需证明它们的差等于零：

$$C_n^0-C_n^1+C_n^2-C_n^3+C_n^4-C_n^5+\cdots=0.$$

这里，左边的式子恰巧是 $(a-b)^n$ 展开式里各项系数的和. 所以，在 $(a-b)^n$ 的展开式里，令 $a=b=1$ 即可证得.

【证】 在公式

$$(a-b)^n=C_n^0a^n-C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2$$
$$-C_n^3a^{n-3}b^3+C_n^4a^{n-4}b^4-C_n^5a^{n-5}b^5+\cdots$$

里，令 $a=b=1$，得

$$C_n^0-C_n^1+C_n^2-C_n^3+C_n^4-C_n^5+\cdots=0. \qquad (1)$$

把所有含"－"号的各项移到等式右边，即得

$$C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots. \qquad (2)$$

这就证得了展开式中各奇数项的和等于各偶数项的和. 又，

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+C_n^3+C_n^4+C_n^5+C_n^6+\cdots=2^n. \qquad (3)$$

(1)＋(3)，得

$$2(C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots)=2^n,$$

$$\therefore\quad C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=\frac{2^n}{2}=2^{n-1}.\qquad(4)$$

从(2)和(4)，得

$$C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots=2^{n-1}.$$

命题得证.

应用 $(a+b)^n$ 展开式里各项系数的和的公式以及例1的结论，还可以证明一些关于组合数的恒等式，举例如下：

例 2. 求证当 n 是偶数时，总有

$$1+2C_n^1+C_n^2+2C_n^3+C_n^4+2C_n^5+\cdots+2C_n^{n-1}+C_n^n$$
$$=3\cdot2^{n-1}.$$

【证】 左边 $=(C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n)$

$$+(C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots+C_n^{n-1}).$$

已知 $\quad C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n,\quad$ (组合总数公式)

$\quad C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots+C_n^{n-1}=2^{n-1},\quad$ (例 1)

$$\therefore\quad 左边=2^n+2^{n-1}$$
$$=(2+1)2^{n-1}$$
$$=3\cdot2^{n-1}.$$

$$\therefore\quad 左边=右边.$$

习　题　3·6

1. 某单位有7篇革命故事，现在要从中取出1篇或几篇编入黑板报里，共有几种不同的取法？

2. 有1分币、2分币、5分币各一枚，1角票、2角票、5角票、1元票、2元票、5元票各一张，可以组成多少种不同的币值？

3. 求证：当 n 为奇数时，总有

$$2+C_n^1+2C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^{n-1}+2C_n^n$$
$$=3\cdot2^{n-1}.$$

§3·7 二项式定理在近似计算中的应用

应用二项式定理，可以比较简捷地计算某些数的正整数次幂的近似值，使它达到一定的精确度.

例 1. 计算 $(1.009)^5$ 的近似值(精确到 0.001).

【解】
$$\begin{aligned}(1.009)^5&=(1+0.009)^5\\&=1+5\times0.009+10\times(0.009)^2\\&\quad+10\times(0.009)^3+\cdots\\&=1+0.045+0.00081\\&\quad+0.00000729+\cdots.\end{aligned}$$

这里可以看出，如把第二项以后的各项一律略去，而前二项之和作为 $(1.009)^5$ 的近似值，那末它与真值间的误差不会超过 0.001. 因此

$$(1.009)^5\approx1+0.045=1.045.$$

例 2. 计算 $(0.991)^5$ 的近似值(精确到 0.001).

【解】
$$\begin{aligned}(0.991)^5&=(1-0.009)^5\\&=1-5\times0.009+10\times0.000081\\&\quad-10\times0.000000729+\cdots\\&=1-0.045+0.00081\\&\quad-0.00000729+\cdots.\end{aligned}$$

这里可以看出，如果略去从第三项开始的以后各项，而把前二项的代数和作为 $(0.991)^5$ 的近似值，它的误差不会超过 0.001，因此

$$(0.991)^5\approx1-0.045=0.955.$$

从上面这两个例子可以看到：如果 a 的绝对值比起 1 来是很小、且 n 不太大的时候，应用近似公式

$$(1+a)^n \approx 1+na \quad (a>0)$$

或

$$(1-a)^n \approx 1-na \quad (a>0)$$

可以计算出$(1\pm a)^n$的近似值，使它具有一定的精确度.

但是，有时也会遇到这样的问题：应用上面的公式求近似值时，它的误差超出了指定的范围，这时就需要在二项展开式里再继续取一项或几项来计算.

例 3. 计算$(1.009)^{20}$的近似值（精确到 0.001）.

【解】
$$\begin{aligned}(1.009)^{20} &= (1+0.009)^{20}\\ &=1+20\times 0.009+190\times(0.009)^2\\ &\quad +1140\times(0.009)^3+\cdots\\ &=1+0.18+0.01539\\ &\quad +0.00083106+\cdots.\end{aligned}$$

可以看出，要使所求的近似值的误差不超过 0.001，需要取展开式中前三项的和，就是

$$(1.009)^{20}\approx 1+0.18+0.01539\approx 1.195.$$

例 4. 计算$(0.991)^{20}$的近似值（精确到 0.001）.

【解】
$$\begin{aligned}(0.991)^{20} &= (1-0.009)^{20}\\ &=1-20\times 0.009+190\times(0.009)^2\\ &\quad -1140\times(0.009)^3+\cdots\\ &=1-0.18+0.01539\\ &\quad -0.00083106+\cdots.\end{aligned}$$

象例 3 一样，这里要使所求的近似值能精确到 0.001，应该取展开式中前三项的代数和，就是

$$(0.991)^{20}\approx 1-0.18+0.01539\approx 0.835.$$

注 应用近似公式

$$(1\pm a)^n\approx 1\pm na \quad (a>0)$$

计算到的近似值，它的误差接近于 $\frac{n(n-1)}{1\cdot2}a^2$，而用近似公式

$$(1\pm a)^n\approx1\pm na+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}a^2\quad(a>0)$$

计算到的近似值，它的误差接近于 $\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}a^3$. 当 a 很小且 n 不过分大时，这两个误差都已很小，在实际应用上已足够保证应有的精确度了.

上面的例子，都是求底数接近于 1 的 n 次幂的近似值，现在再来举一个求其他一些数的 n 次幂的例子.

例 5. 计算 $(4.003)^6$ 的近似值(精确到 0.01).

【解】
$$\begin{aligned}(4.003)^6&=(4+0.003)^6\\&=4^6+6\times4^5\times0.003\\&\quad+15\times4^4\times(0.003)^2+\cdots\\&=4096+18.432+0.03456+\cdots\\&\approx4114.47.\end{aligned}$$

注　倘使 4.003 是一个近似数，按照近似计算法则，$(4.003)^6$ 的近似值只能取 4 个有效数字，这时就有

$$\begin{aligned}(4.003)^6&=(4+0.003)^6\\&\approx4^6+6\times4^5\times0.003\\&\approx4096+18.4\\&\approx4114.\end{aligned}$$

习　题　3·7

应用近似公式 $(1\pm a)^n\approx1\pm na(a>0)$，计算下列各题：

1. $(1.02)^6$.　　2. $(0.998)^8$.

3. $(0.999)^{10}$.　　4. $(1.0006)^{15}$.

5. $(1.003)^{10}$.　　6. $(0.9997)^{12}$.

应用二项式定理，计算下列各题的近似值，使其值的误差不超过指定的范围：

7. $(3.002)^6$, 误差不超过 0.001.

8. $(1.002)^{15}$,误差不超过 0.001.

9. $(5.001)^5$, 误差不超过 1.

10. $(3.998)^4$, 误差不超过 0.1.

本 章 提 要

1. 二项式定理

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^ka^{n-k}b^k+\cdots+C_n^nb^n.$$

2. 二项展开式的性质

(1) 通项公式

$$T_{k+1}=C_n^ka^{n-k}b^k \quad (k=0,1,2,\cdots,n);$$

(2) 系数最大的项

当 n 为偶数时: 第 $\frac{n}{2}+1$ 项,

当 n 为奇数时: 第 $\frac{n+1}{2}$ 项和第 $\frac{n+1}{2}+1$ 项;

(3) 各项系数的和

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^k+\cdots+C_n^n=2^n.$$

3. $(a-b)^n$ 的展开式

$$(a-b)^n=C_n^0a^n-C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2-\cdots+(-1)^kC_n^ka^{n-k}b^k+\cdots+(-1)^nC_n^nb^n.$$

通项公式:

$$T_{k+1}=(-1)^kC_n^ka^{n-k}b^k \quad (k=0,1,2,\cdots,n).$$

复 习 题 三

1. 展开:

(1) $(\sqrt{x}+\sqrt[3]{a})^6$; (2) $\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^7$.

2. 化简:

(1) $(2x^{\frac{1}{2}}+3x^{\frac{1}{3}})^4-(2x^{\frac{1}{2}}-3x^{\frac{1}{3}})^4$;

(2) $(1+\sqrt{a})^5+(1-\sqrt{a})^5$.

3. 应用二项式定理，展开：

(1) $(1+x-x^2)^5$;　　　　(2) $(1-2x+x^2)^6$.

4. $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^n$展开式里第4项的系数与第13项的系数相等，求展开式里不含x的项.

5. $(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{2}{3}})^n$ 展开式里第5项的系数与第3项的系数的比是7:2，求展开式里含有x项的系数.

*6. 求：

(1) $(1-2x)^5(1+3x)^4$展开式里的前三项；

(2) $(1+x+x^2)(1-x)^{10}$ 展开式里含有x^4的项；

(3) $(1+2x-3x^2)^6$ 展开式里含有x^5的项的系数；

(4) $\left(x-1+\dfrac{1}{x}\right)^5$展开式里不含$x$的项.

7. 求证：

(1) $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^{2n}$ 展开式里的常数项是$(-2)^n\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{n!}$；

(2) $(1+x)^{2n}$ 展开式里系数最大的项是 $\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{n!}(2x)^n$.

8. 求：

(1) $(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)\cdots(1+x_n)$展开式里各项系数的和；

(2) $(1+x_1)(1+x_2)^2(1+x_3)^3\cdots(1+x_n)^n$ 展开式里各项系数的和.

9. 应用二项式定理，证明：

(1) $55^{55}+9$ 能被8整除；　　(2) $(n+1)^n-1$ 能被n^2整除；

(3) $99^{10}-1$ 能被1000整除；　　(4) $89^{10}+87$ 能被88整除.

[解法举例：(1) $55^{55}+9=(56-1)^{55}+9$

$$=(56^{55}-C_{55}^1\cdot56^{54}+C_{55}^2\cdot56^{53}-\cdots+C_{55}^{54}\cdot56-1)+9$$

$$=56[56^{54}-C_{55}^1 56^{53}+C_{55}^2 56^{52}-\cdots+C_{55}^{54}]+8,$$

这里最后一式的两个项都能被8整除，所以原式能被8整除.]

10. 用二项式定理，求89^{10}除以88所得的余数.

11. 计算下列各式的值，精确到0.01：

(1) 1.04^6;　　　　(2) 1.998^5.

第四章 复 数

数的概念的扩展，是代数里重要内容之一，它和代数里的其他内容(如代数式、函数、方程等等)的研究有着密切的联系．到目前为止，我们所讲到的数还只限于实数；代数式、方程等等，还只限于在实数范围里进行研究．为了进一步研究这些内容，同时也为了今后能更有效地掌握数的知识、处理有关实际问题，本章将把数的概念作再一次的扩展，引进关于复数的知识．

§4·1 数的概念的扩展

在小学算术里学过自然数、零、正分数的基础上，“代数”第一册和第二册已经把数的概念作了两次扩展．到目前为止，读者已学过的数的系统，可以归结成下表：

$$
\text{实数}\begin{cases}
\text{有理数}\begin{cases}
\text{正有理数}\begin{cases}\text{正整数(自然数)}\\ \text{正分数}\end{cases}\\
\text{零}\\
\text{负有理数}\begin{cases}\text{负整数}\\ \text{负分数}\end{cases}
\end{cases}\\
\text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\\ \text{负无理数}\end{cases}
\end{cases}
$$

我们知道，在实数范围里，加法、减法、乘法、除法(除数不能是零)和乘方这五种运算总是可以进行的，但是乘方的逆运算——开方——却还不是永远可以进行的．例如，在实数范

围里，负数就不能开平方.

回顾一下，过去对于数的概念的几次扩展，都是从解决实际问题的需要提出的. 这说明了，数的概念的每一次扩展，都是为了适应人类生产活动中实际的需要. 但是，从数学运算的角度来看，这种需要也正反映在要解决"逆运算可进行"这一问题. 例如，为了使加法的逆运算——减法——永远可以进行，就需要引进负数；使乘法的逆运算——除法(除数不是零)——永远可以进行，就需要引进分数；使正数的乘方的逆运算——正数的开方——永远可以进行，就需要引进无理数. 新数的引进，解决了逆运算可进行的问题，数的范围也随着扩大了；由此，也就可能更有效地解决更多的实际问题.

这里还需要注意，数的范围的每一次扩大，都是在原有的数的基础上增添了一种新的数而构成的. 因此，在扩大了的数的范围里，原有的数所原来具有的运算意义和运算性质，仍旧要保持下来.

为了要使乘方的逆运算永远可以进行，需要把实数的范围再加以扩大. 下面各节将根据上面所说的原则来扩展数的概念.

习 题 4·1

1. 方程 $4x=3$ 在整数范围里有没有解？要使这个方程有解，需要引进怎样的数？

2. 方程 $4x+3=0$ 在正有理数范围里有没有解？ 要使这个方程有解，需要引进怎样的数？

3. 方程 $x^2=2$ 在有理数范围里有没有解？要使这个方程有解，需要引进怎样的数？

4. 在实数范围里，方程 $x^2+1=0$ 是否有解？

5. 在什么条件下，实数系数的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 才有实数根？

§4·2 复数的概念

我们早已知道，在实数范围里，负数不能开平方. 最简单的一个例子就是 -1 的平方根没有意义.

为了使开方运算永远能够进行，首先就得引进一个新的数，用它来确定 -1 的平方根的意义.

本节就从解决这个问题着手来引进新的数.

1. 虚数单位 要确定 -1 的平方根的意义，也就是要引进一种新的数，使方程

$$x^2=-1 \tag{1}$$

有确定的解.

我们用符号"i"来表示这样的新数，并且规定，数 i 具有下面的两条性质：

1° $i^2=-1$;

2° i 与实数在一起，可以按照实数的运算法则进行运算.

数 i 称为**虚数单位**.

根据上面的规定，可以知道：

$$(-i)^2=i^2=-1,$$

所以 $-i$ 也是方程 $x^2+1=0$ 的一个根. 由此就解决原来提出的问题，可以说：在扩大了的数的范围里，方程

$$x^2+1=0$$

有两个根 i 与 $-i$; 或者说，-1 有两个平方根 i 与 $-i$.

根据上面的规定，容易推出虚数单位 i 的一个重要性质：

$$i^1=i; \qquad i^2=-1;$$

$$i^3=i^2\cdot i=-i; \qquad i^4=(i^2)^2=(-1)^2=1.$$

一般的，对于任意整数 n，有

$$i^{4n}=(i^4)^n=1^n=1;$$
$$i^{4n+1}=i^{4n}\cdot i=i;$$
$$i^{4n+2}=i^{4n}\cdot i^2=-1;$$
$$i^{4n+3}=i^{4n}\cdot i^3=-i.$$

这个性质通常称为 i 的**周期性**.

例 1. 计算:

$$i^{-1},\quad i^{-2},\quad i^{-3},\quad i^{-4}.$$

【解】 $i^{-1}=\dfrac{1}{i}=\dfrac{i}{i^2}=\dfrac{i}{-1}=-i;$

$$i^{-2}=\frac{1}{i^2}=\frac{1}{-1}=-1;$$

$$i^{-3}=\frac{1}{i^3}=\frac{i}{i^4}=i;$$

$$i^{-4}=\frac{1}{i^4}=1.$$

注　解这个问题,也可应用上面的性质,把 i^{-1} 变形成 i^{-4+3} 来计算,具体解法请读者自己完成.

例 2. 计算:

$$i\cdot i^2\cdot i^3\cdots i^{8n},$$

这里 n 是自然数.

【解】 $i\cdot i^2\cdot i^3\cdots i^{8n}=i^{(1+2+3+\cdots+8n)}.$

$\because\quad 1+2+3+\cdots+8n=\dfrac{8n(8n+1)}{2}=4n(8n+1),$

$\therefore\quad$ 原式 $=i^{4n(8n+1)}=(i^{4n})^{(8n+1)}=1^{8n+1}=1.$

习　题　4·2(1)

1. 计算 i^{52}, i^{49}, i^{99}, i^{-31}.

2. 计算:

(1) $i^{97}+i^{102}+i^{803}-i^{27}$;

(2) $i^k \cdot i^{k+1} \cdot i^{k+2} \cdot i^{k+3}$ （k 是整数）；

(3) $i \cdot i^3 \cdot i^5 \cdots i^{(2k-1)}$ （k 是整数）．

［提示：(3)分 k 为奇数或偶数两种情况来讨论．］

2．纯虚数 我们来解下面的方程：

$$x^2+2=0.$$

这个方程也就是

$$x^2=-2.$$

很明显，它在实数范围里没有解．

但是，根据上面所规定的虚数单位 i 的意义，容易算出：

$$(\sqrt{2}\,i)^2=(\sqrt{2}\,i)(\sqrt{2}\,i)=2i^2=-2,$$

$$(-\sqrt{2}\,i)^2=(\sqrt{2}\,i)^2=-2.$$

这样，把数的范围扩大以后，这个方程就有两个根：

$$x_1=\sqrt{2}\,i, \quad x_2=-\sqrt{2}\,i.$$

一般的，如果 a 是一个正实数，那末 $\sqrt{a}$ 也是一个正实数，且有

$$(\pm\sqrt{a}\,i)^2=ai^2=a\times(-1)=-a.$$

因此，把数的范围扩大以后，负数 $-a$ 的平方根就有两个值：

$$\sqrt{a}\,i \quad 和 \quad -\sqrt{a}\,i.$$

形如 bi（这里 b 是一个不等于零的实数）的数称为**纯虚数**．

3．虚数 我们再来解下面这个方程：

$$x^2-2x+2=0.$$

这里，判别式

$$b^2-4ac=4-8=-4<0.$$

这个方程在实数范围里没有解．

应用配方的方法，$x^2-2x+2=(x-1)^2+1$，原方程可以变形成

$$(x-1)^2+1=0,$$

就是

$$(x-1)^2=-1.$$

由此可得

$$x-1=\pm i.$$

根据 i 的意义，两边都加上 1，得

$$x=1\pm i.$$

这样，在扩大了的数的范围里，方程 $x^2-2x+2=0$ 也有两个根：

$$x_1=1+i,\quad x_2=1-i.$$

形如 $a+bi$（这里 a, b 都是实数，且 $b\neq 0$）的数称为**虚数**.

4．复数 在代数第二册里当引进了无理数以后，为了把这种新的数和原有的有理数用统一的名称来称呼，引进了名词"实数"，并且说"有理数和无理数总称实数".

同样，在引进了虚数以后，也需要把这种新的数和原有的实数用统一的名称来称呼. 我们引进以下的定义：

如果 a、b 都表示实数，那末形如 $a+bi$ 的数称为**复数**；a 称为**复数的实部**，bi 称为**复数的虚部**，b 称为**虚部的系数**.

当 $b=0$ 时，复数 $a+bi$ 就表示实数 a，即

$$a+0i=a.$$

特别，当 $a=b=0$ 时，复数 $a+bi$ 就表示数 0，即

$$0+0i=0.$$

当 $b\neq 0$ 的时候，复数 $a+bi$ 是一个虚数. 这时，如果 $a=0$，那末它就表示纯虚数 bi，即

$$0+bi=bi.$$

根据上面这样的规定，可以把复数 $a+bi$ 按照 a, b 是否为零分类如下：

$$\text{复数 } a+bi\begin{cases}\text{实数}(a+0i=a)\\ \text{虚数}(a+bi,\ b\neq 0)\begin{cases}\text{纯虚数}(0+bi=bi,\ b\neq 0)\\ \text{非纯虚数}(a+bi,\ a\neq 0,\ b\neq 0)\end{cases}\end{cases}$$

注意 1. 如果 $a+bi$ 表示一个虚数，必须加上 $b\neq 0$ 这一条件.

2. 实数有有理数、无理数或正数、负数的区分（见第 87 页的表），对于虚数来说，就没有这样的区分.

3. 为了方便，有时也用一个单独的字母，例如 z，来表示一个复数. 这时，如果要进一步指出它的实部和虚部是什么，就说："复数 $z=a+bi$".

4. 如果没有特别的说明，本章中的字母 a, b 都表示实数.

例 3. 计算 $\dfrac{2}{3}\sqrt{18}i+\dfrac{\sqrt{8}}{2}i-\dfrac{3}{5}\sqrt{50}i$.

【解】 原式 $=2\sqrt{2}\,i+\sqrt{2}\,i-3\sqrt{2}\,i$

$=(2\sqrt{2}+\sqrt{2}-3\sqrt{2})i$

$=0i=0$.

例 4. 解方程 $x^4-x^2-6=0$.

【解】 $x^4-x^2-6=0$.

$\therefore\quad (x^2+2)(x^2-3)=0$.

由 $x^2-3=0$，得 $x=\pm\sqrt{3}$.

由 $x^2+2=0$，得 $x^2=-2$，$x=\pm\sqrt{2}\,i$.

由此即得，原方程有 4 个根：$\pm\sqrt{3}$，$\pm\sqrt{2}\,i$.

习 题 4·2(2)

1. 写出下列这些复数的实部、虚部和虚部系数：

(1) $1+i$;　　(2) $-\sqrt{3}i$;

(3) $-\sqrt{2}$;　　(4) 0.

2. 已知复数的实部和虚部的系数，写出这个复数来：

(1) 实部是 $-\sqrt{2}$，虚部的系数是 1;

(2) 实部是 0，虚部的系数是 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

(3) 实部是 3，虚部的系数是 0；

(4) 实部是 1，虚部的系数是 -1.

3. 回答下面的问题：

(1) $3i$ 是不是正数，$-3i$ 是不是负数？

(2) $\sqrt{5}\,i$ 是不是无理数？

(3) $0i$ 是不是虚数？

4. 计算：

(1) $2i+5i-9i$；　　(2) $\frac{2}{3}i+\frac{3}{4}i-\frac{5}{6}i$；

(3) $\sqrt{12}i-\sqrt{27}i+\sqrt{3}\,i$；　　(4) $\sqrt[3]{-8}i+\sqrt{8}\,i-8i$.

5. 解方程：

(1) $x^2+5=0$；　　(2) $4x^2+9=0$；

(3) $x^4-16=0$；　　(4) $x^4+x^2-20=0$.

§4·3　复数与平面内点之间的对应

在上一节，从负数开平方的需要出发，逐步引进了复数的概念. 但是，这样引进的新数，究竟有什么具体意义呢？

为了解决这个问题，需要象过去用数轴上的点与实数间的关系来说明实数的几何意义一样，利用平面内的点与复数间的关系来说明复数的几何意义.

1. 复数平面　在代数第二册里，我们已经学过：任何一个实数 a，都可以用给定的数轴上唯一的一个点来表示；反过来，给定的数轴上任何一个点，都唯一地表示一个实数. 这就是说，数轴上的点和实数间可以建立一一对应的关系.

在代数第三册学习函数和它的图象时，我们还曾学过，用两条互相垂直的数轴 x 和 y（它们的交点是 O）构成一个直角坐标系；那末，一对排定了顺序的实数 (a, b)，就可以用这个直角坐标系里唯一的点 $M(a, b)$ 来表示；反过来，在这个直角

坐标系里的每一个点 $M(a, b)$，也都唯一地表示着一对排定了顺序的实数(a, b). 这就是说，平面直角坐标系里的点，和一对排定了顺序的实数之间，可以建立一一对应的关系.

从复数 $a+bi$ 的定义可以看出，复数也是由一对排定了顺序的实数 a 和 b 构成的，这里实部 a 和虚部系数 b 就分别相当于点 $M(a, b)$ 的横坐标和纵坐标. 所以，在引进了复数以后，就可以用一个复数 $z=a+bi$ 来表示平面直角坐标系里的点 $M(a, b)$；反过来，对于任何一个复数 $z=a+bi$，也就可以用平面直角坐标系里以 a 做横坐标，b 做纵坐标的点 $M(a, b)$ 来表示它(图 4·1). 这也就是说，平面直角坐标系里的点，和复数之间，可以建立起一一对应的关系.

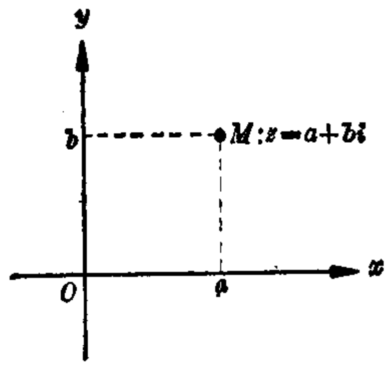


图 4·1

很明显，对于用这种方法来表示复数 $z=a+bi$，当 $b=0$ 时，对应的点都在 x 轴上；当 $a=0$ 时，对应的点都在 y 轴上. 这也就是说，表示实数的点都在 x 轴上，表示纯虚数的点都在 y 轴上.

这种用来表示复数的平面，称为**复数平面**. 其中 x 轴称为**实轴**，y 轴称为**虚轴**.

2. 复数的相等与不等 在学习实数时，我们知道，利用数轴上的点的位置关系，可以规定它们所对应的实数间的相等和不等的关系. 就是：

设实数 a 和 a' 在数轴上所对应的点是 A 和 A'，那末，

当点 A 和点 A' 重合时，$a=a'$；

当点 A 和点 A' 不重合时，$a\neq a'$，这时，

点 A 在点 A' 的右边时，$a>a'$；

点 A 在点 A' 的左边时，$a<a'$.

类似地，也可以利用平面内的点的位置关系，来规定它们所对应的复数间的相等和不等的关系，就是：

设复数 $a+bi$ 和 $a'+b'i$ 在平面内所对应的点是 A 和 A'，那末：

当点 A 和点 A' 重合时，$a+bi=a'+b'i$;

当点 A 和点 A' 不重合时，$a+bi\neq a'+b'i$.

很明显，如果两个复数 $a+bi$ 和 $a'+b'i$ 在平面内所对应的点 A 和 A' 重合为一点（图 4·2），必须并且只须它们的实部 a 和 a'，虚部系数 b 和 b' 分别相等. 因此，关于两个复数相等的意义也可以说成：如果 $a=a'$, $b=b'$，那末 $a+bi=a'+b'i$; 反过来，如果 $a+bi=a'+b'i$，那末 $a=a'$, $b=b'$. 我们就用这种方法来判断两个复数是不是相等.

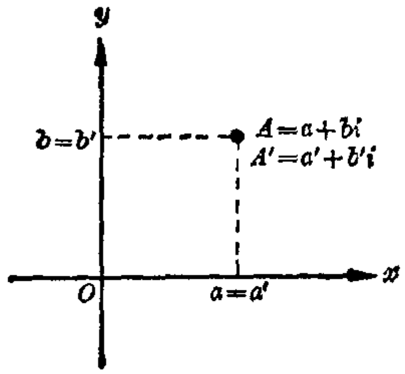


图 4·2

必须注意，在实数范围里，对于两个不相等的数，还可以根据它们在数轴上所对应的点的左右位置关系来规定这两个实数间的大小. 但是，对于两个复数（只要其中有一个不是实数）所对应的点之间，就没有这种关系，所以，对于两个复数，只要其中有一个不是实数，就不能比较它们之间哪一个大、哪一个小. 例如，只能说 $3i\neq-3i$、$1+i\neq 0$，而不比较 $3i$ 与 $-3i$ 哪一个大，$1+i$ 与 0 哪一个大.

*注　在第 88 页曾谈到，把数的范围扩大以后，要求原来的数所具有的运算意义和运算性质仍旧保持下来. 倘使企图用一种方法来规定两个任意复数间的大小，就会对这一要求产生矛盾.

例如，对于 i 与 0，不论用什么方法来规定它们之间的大小，都将得

出矛盾．这就是说，如果

$$i>0, \quad \text{或} \quad i<0,$$

这样，在不等式两边同乘以 i，根据不等式的性质，应有

$$i^2>0, \quad \text{或} \quad i^2>0,$$

就是

$$-1>0, \quad \text{或} \quad -1>0,$$

这就引起了矛盾．这就表明，既不能 $i>0$，又不能 $i<0$，即 i 与 0 这两个数之间不能规定大小关系．

例 求适合于方程

$$(3x+2y)+(3x-y)i=13-2i$$

的实数 x 和 y 的值．

分析 根据复数相等的意义，使等号两边两个复数的实部与虚部系数分别相等，就可以得到一个关于 x, y 的方程组，解这个方程组即得这个问题的解．

【解】 已知 x 和 y 是实数，所以 $3x+2y$ 和 $3x-y$ 都是实数，那末，

$$\because \quad (3x+2y)+(3x-y)i=13-2i,$$

$$\therefore \quad \begin{cases} 3x+2y=13, \\ 3x-y=-2. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} x=1, \\ y=5. \end{cases}$$

注意 应用 $a+bi=a'+b'i$ 的关系导出 $\begin{cases} a=a' \\ b=b' \end{cases}$ 时，必须注意 a, a', b, b' 都应该全是实数．

3．共轭复数 考察下面这两个复数：

$$z_1=4+3i, \quad z_2=4-3i.$$

这是实部相等、而虚部的系数互为相反的数的两个复数．把这两个复数在平面内表示出来，可以看到，它们所对应的点对

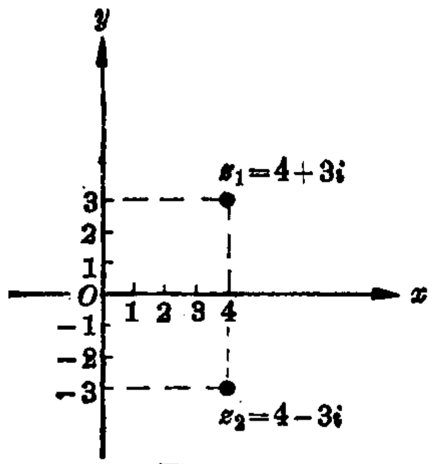


图 4·3

称于 x 轴(图 4·3).

我们把关于 x 轴为对称的两个点所对应的两个复数称为**共轭复数**. 这就是说:

如果两个复数的实部相等、虚部系数是相反的数, 那末这两个复数为共轭复数.

如用字母 z 来表示复数 $a+bi$, 那末它的共轭复数 $a-bi$ 就可以用符号 $\bar{z}$ 来表示,就是

$$\text{如果 } z=a+bi, \quad \text{那末 } \bar{z}=a-bi.$$

因为 0 的相反数仍旧是 0, 所以当虚部系数是 0 时,这个复数的共轭复数就是它本身. 这也就是说: 实数与它本身共轭.

注 当 $b\neq0$ 时, 复数 z 和它的共轭复数 $\bar{z}$ 都是虚数, 所以称它们为共轭虚数.

习 题 4·3

1. 在复平面内, 作出表示下列各个复数的点:

(1) 1; (2) -1;

(3) 0; (4) i;

(5) $-i$; (6) $1+i$;

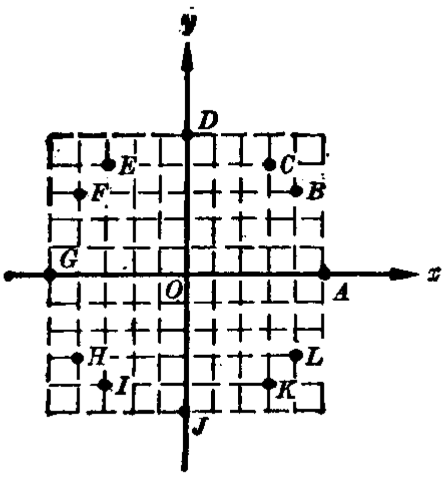
(7) $-1-i$; (8) $1-i$;

(9) $-1+i$.

2. 写出图中各点所表示的复数(方格的每边等于单位长).

3. 指出上题中各对互为共轭的复数.

4. 求适合于下列方程的实数 x 和 y 的值:



(第 2 题)

(1) $(3x-4)+(4y+5)i=0$;

[提示：$0=0+0i$.]

(2) $(3x-4y)+(4x-3y)i=7i$;

(3) $(x+y)+xyi=-5-24i$;

(4) $(x^2-y^2)+2xyi=6i-8$.

5. 实数m取哪些值时，复数$(m^2-3m-4)+(m^2-5m-6)i$是

(1) 实数；　　(2) 纯虚数；　　(3) 零.

§4·4　复数与平面内向量之间的对应

1. 向量　在图4·1里，如把原点O与点M连结起来，并且把原点O看做是这条线段的起点，点M看做这条线段的终点(图 ·4)，就得到一条有方向的线段，这样的一条线段，称为一个向量①，记做$\overrightarrow{OM}$. 线段OM的长度(就是向量$\overrightarrow{OM}$的长度)r指出了向量$\overrightarrow{OM}$的值的大小，$\angle xOM$的值θ指出了向量$\overrightarrow{OM}$的方向.

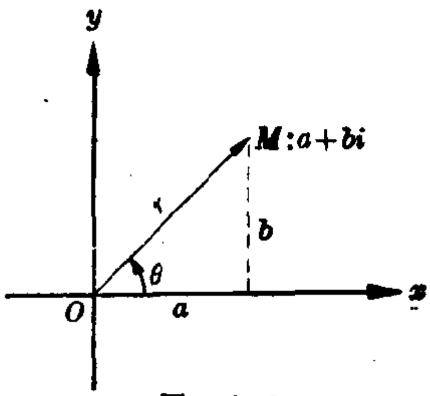


图 4·4

当点M与点O重合时，线段OM退缩成为一点，称这样的向量$\overrightarrow{OM}$为零向量. 零向量没有确定的方向.

根据这样的规定，平面内的点，和向量之间，就可以建立起一一对应的关系. 即把点M对应于向量$\overrightarrow{OM}$.

在§4·3已经讲过，平面内的点与复数之间，可以建立起一一对应的关系. 因此，通过平面内的点作为媒介，可以建立

① 方向相同的等长线段，不管它们的起点在哪里，都认为是相等的向量. 这里所指的则是限定以原点为起点的向量，明确些说，应该称为位置向量. 本书中所讲的向量都是位置向量，所以全简称为向量.

起复数与平面内向量间的一一对应关系：

$$\text{复数 } z=a+bi \xleftrightarrow{\text{对应}} \text{点 } M(a,b) \xleftrightarrow{\text{对应}} \text{向量 } \overrightarrow{OM}.$$

例 1. 作出与下列各复数对应的向量：

(1) $z_1=-2+i$；

(2) $z_2=-\sqrt{3}i$.

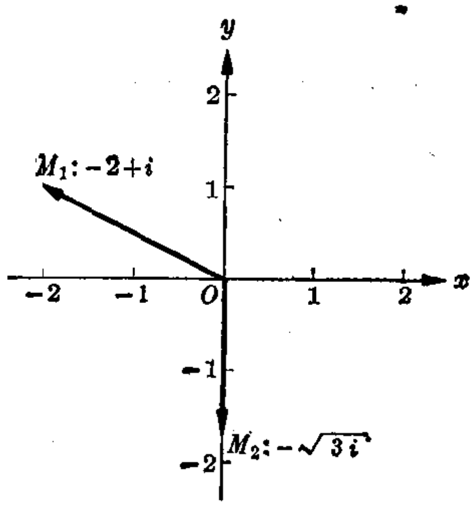


图 4·5

【解】 (1) 作出点 $M_1(-2, 1)$，联 OM_1，即得与复数 z_1 对应的向量 $\overrightarrow{OM_1}$.

(2) 作出点 $M_2(0, -\sqrt{3})$，联 OM_2，即得与复数 z_2 对应的向量 $\overrightarrow{OM_2}$.

2. 复数的模数 如果向量 $\overrightarrow{OM}$ 与复数 $z=a+bi$ 相对应（图 4·6），向量 $\overrightarrow{OM}$ 的长 r，就称为复数 z 的**模数**. 容易看出，这里

$$r=\sqrt{a^2+b^2}.$$

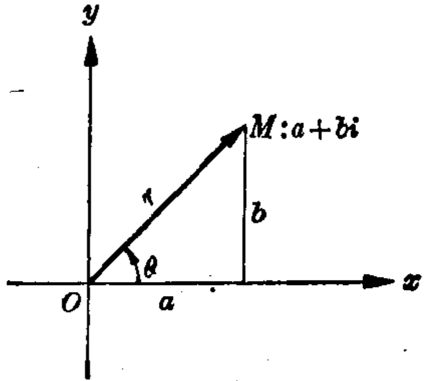


图 4·6

如果 $b=0$，那末 $z=a+bi$ 是一个实数，这时它的模数等于 $\sqrt{a^2+0^2}$，也就是 $|a|$. 因此，复数的模数也称为**复数的绝对值**，并且也用在这个复数的两旁加上两条竖线来表示. 就是

$$|z|=|a+bi|=r=\sqrt{a^2+b^2}.$$

例如，例 1 里的复数 z_1 和 z_2 的模数分别是

$$|z_1|=|-2+i|=\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5},$$

$$|z_2|=|-\sqrt{3}i|=\sqrt{0^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{3}.$$

例 2. 求证两个共轭复数的绝对值相等.

【证】 设 $z=a+bi$，那末它的共轭复数就是 $\bar{z}=a-bi$.

于是

$$|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2},$$

$$|\bar{z}|=|a-bi|=\sqrt{a^2+(-b)^2}=\sqrt{a^2+b^2}.$$

$$\therefore\quad |z|=|\bar{z}|.$$

*例 3. 求满足下列条件的复数 z 所对应的点的轨迹:

(1) $|z|=4$;　　　　(2) $|z|<4$.

分析 复数 z 的绝对值,从几何意义来说,就是这个复数所对应的点 M 与原点 O 间的距离. 因此,本题就是求与原点的距离等于 4 和小于 4 的点的轨迹.

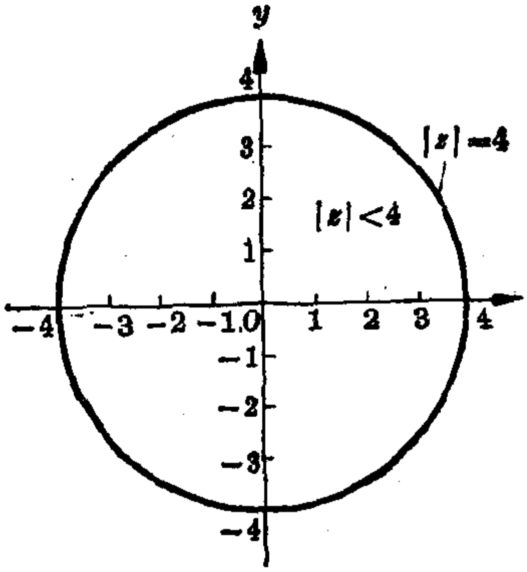


图 4·7

【解】 设复数 z 所对应的点是 M.

(1) $|z|=4$ 的几何意义是:点 M 与原点 O 的距离永远等于 4 个单位长度. 由此可知,点 M 的轨迹是以原点为中心、4 个单位长度为半径的圆.

(2) $|z|<4$ 的几何意义是: 点 M 与原点 O 的距离永远小于 4 个单位长度. 由此可知, 点 M 的轨迹是以原点为中心、4 个单位长度为半径的圆的内部.

习　题　4·4(1)

1. 作出下列各复数所对应的向量:

(1) $3+4i$;　　　　(2) $3-4i$;

(3) $-3+4i$;　　　　(4) $-3-4i$;

(5) $5i$;　　　　(6) $-5i$;

(7) 5;　　　　(8) -5.

2. 证明：上题中的8个复数所对应的点在同一圆上.

[提示：证明这些点和原点的距离都相等.]

3. 已知复数

$$z_1=-\sqrt{3}+i,\qquad z_2=2,$$
$$z_3=\sqrt{2}-\sqrt{2}i,\qquad z_4=-2i.$$

(1) 求作这些复数所对应的向量;

(2) 求这些复数的绝对值;

(3) 求这些复数的共轭复数,并作出它们所对应的向量;

(4) 这4个复数以及它们的共轭复数所对应的点，是不是在同一圆上？为什么？

*4. 求满足条件 $1\leqslant|z|\leqslant 2$ 的复数 z 所对应的点的轨迹.

3. 复数的辐角 在图4·8里，表示向量 $\overrightarrow{OM}$ 的方向的这个角 θ，称为这个向量所对应的复数 z 的**辐角**. 这就是说:

x 轴的正方向与向量 $\overrightarrow{OM}$ 所夹的角，称为向量 $\overrightarrow{OM}$ 所对应的复数 z 的辐角.

很明显,不等于零的复数 z 的辐角有无数多个值,这些值相差 2π 的整数倍. 把其中适合于

$$0\leqslant\theta<2\pi$$

的辐角 θ 的值称做辐角的主值.

知道了一个复数的辐角的主值,那末,在这个主值上加上 $2k\pi$(k 是任意整数),就得到了这个复数的辐角的一般值. 例如,复数 i 的辐角的主值是 $\frac{\pi}{2}$，它的一般值是 $\frac{\pi}{2}+2k\pi$，这里 k 是任意的整数.

利用三角学中已经学过的知识,可以知道:要确定一个复数 $z=a+bi(z\neq 0)$ 的辐角 θ，只需利用公式:

$$\cos\theta=\frac{a}{r},\qquad \sin\theta=\frac{b}{r},$$

其中 $r=\sqrt{a^2+b^2}$.

必须注意，当 $z=a+bi=0$ 时，它所对应的向量 $\overrightarrow{OM}$ 没有确定的方向，所以 0 这个数没有确定的辐角.

例 4. 求下列复数的辐角的主值:

(1) $1+i$;　　(2) $-1+i$;　　(3) $-1-i$;

(4) $1-i$;　　(5) $\sqrt{2}$;　　(6) $\sqrt{2}i$;

(7) $-\sqrt{2}$;　　(8) $-\sqrt{2}i$.

【解】 容易看出，这 8 个复数的模数都等于 $\sqrt{2}$. 设这 8 个复数的辐角的主值分别是 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \cdots, \theta_8$.

$$\because \begin{cases} \cos\theta_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ \sin\theta_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \end{cases}$$

可以看出，θ_1 的终边在第 I 象限，所以 $0<\theta_1<\dfrac{\pi}{2}$. 再从这两方程之一即可求得

$$\theta_1=\frac{\pi}{4}.$$

同理，可以求得

$$\theta_2=\frac{3}{4}\pi,\quad \theta_3=\frac{5}{4}\pi,\quad \theta_4=\frac{7}{4}\pi.$$

$$\because \begin{cases} \cos\theta_5=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1, \\ \sin\theta_5=\dfrac{0}{\sqrt{2}}=0, \end{cases}$$

可以看出，θ_5 的终边在 x 轴的正方向 Ox 上，由此得 $\theta_5=0$.

同理可得

$$\theta_6=\frac{\pi}{2},\qquad \theta_7=\pi,\qquad \theta_8=\frac{3}{2}\pi.$$

说明 这里如果只写出一个方程

$$\cos\theta_1=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

那末因为余弦函数的值是 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 的在 0 到 2π 间的角仍有两个，即 $\frac{\pi}{4}$ 和 $\frac{3}{4}\pi$，所以还不能确定 θ_1 的值．但是，先从这两个方程确定 θ_1 的终边位置以后，那末就只需应用其中一个方程求出 θ_1，这时所得的值也必适合另一个方程．

从这例子不难看出，根据 a、b 的符号就可确定复数 $z=a+bi$ 的辐角的主值所在的范围，如下表所示：

a	b	辐角终边所在象限	辐角的主值范围
+	+	I	$0<\theta<\frac{\pi}{2}$
−	+	II	$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$
−	−	III	$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$
+	−	IV	$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$

这样，确定了辐角的主值范围以后，也就可以应用公式

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{b}{a}$$

来确定 θ 的值．例如，就复数 $-1-i$ 来说，从 $a=-1$、$b=-1$ 可知，辐角的主值在 π 与 $\frac{3}{2}\pi$ 之间，再从

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{-1}{-1}=1$$

就可确定辐角的主值是 $\frac{5}{4}\pi$．

习 题 4·4(2)

1. 设 $a>0$、$b>0$, 求

(1) a; (2) $-a$; (3) bi; (4) $-bi$

的辐角的主值.

2. 求下列各复数的辐角的主值:

(1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}i$; (2) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}i$;

(3) $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}i$; (4) $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}i$.

3. 求下列各复数以及它们的共轭复数的辐角的主值(查表):

(1) $-4-\sqrt{3}i$; (2) $5+12i$.

4. 复数的三角函数式 从公式

$$\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{a}{r},\\ \sin\theta=\dfrac{b}{r}\end{cases}$$

容易看出, 复数 $z=a+bi$ 的实部 a 和虚部系数 b, 可以分别用关于模数 r 和辐角 θ 的表达式

$$\begin{cases}a=r\cos\theta,\\ b=r\sin\theta\end{cases}$$

来表示. 所以,复数 $z=a+bi$ 也就可以应用关于 r 和 θ 的表达式

$$\begin{aligned}z=a+bi&=r\cos\theta+ir\sin\theta\\ &=r(\cos\theta+i\sin\theta)\end{aligned}$$

来表示.

式子 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 称为复数 z 的**三角函数式**; 与之区别,式子 $a+bi$ 称为复数 z 的**代数式**.

很明显,知道了一个复数的代数式,只需应用第 102 页里

的公式来确定它的模数和辐角(通常只需写出辐角的主值)，就可以把它化成三角函数式.

例 5. 把下列复数改用三角函数式表示:

(1) $-\sqrt{3}+i$;　　　　(2) -1.

【解】 (1) 这里 $r=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=2$.

$$\because \begin{cases} \cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin\theta=\dfrac{1}{2}, \end{cases} \quad \therefore\ \theta \text{ 的主值是 } \frac{5}{6}\pi.$$

$$\therefore\quad z_1=-\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right).$$

(2) 这里 $r=1$, θ 的主值是 π.

$$\therefore\quad z_2=-1=\cos\pi+i\sin\pi.$$

例 6. 求复数 $4\left(\cos\dfrac{\pi}{3}-i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$的模数与辐角.

分析　这里 $4\left(\cos\dfrac{\pi}{3}-i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$还不是 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 的形式，所以不能直接看出它的辐角是什么. 为此，先把它化成三角函数式.

【解】 $\because\quad \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\dfrac{\pi}{3},$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3},$$

$$\therefore\quad 4\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right].$$

由此可知，这个复数的模数是 4，辐角是 $2k\pi-\dfrac{\pi}{3}$(这里 k 是整数).

注　这里因为并不要求求出辐角的主值，所以上面用负角的三角

函数来解就比较简便. 倘使要求求辐角的主值，那末只需在 $2k\pi-\frac{\pi}{3}$ 中令 $k=1$，即得主值是 $\frac{5}{3}\pi$.

一般的，对于形如 $r(\cos\theta-i\sin\theta)$ 的复数，都可以用这种方法化成复数的三角函数式 $r[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]$.

习　题　4·4(3)

1. 化下列各复数为三角函数式，并且作出和它们对应的向量:

(1) $4+3i$;　　(2) $-5-12i$;

(3) $3\sqrt{3}-3i$;　　(4) $-5+5i$;

(5) -5;　　(6) 13;

(7) $6i$;　　(8) $-4i$.

2. 化下列各复数为代数式，并且作出和它们对应的向量:

(1) $4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$;　　(2) $4(\cos\pi+i\sin\pi)$;

(3) $4\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi\right)$;　　(4) $4\left(\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi\right)$.

3. 已知 $z=a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，用复数的三角函数式表示它的共轭复数 $\bar{z}$.

*4. 化下列各复数为三角函数式，然后求出它们的模数和辐角主值:

(1) $2\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)$;　　(2) $-3\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

(3) $\sqrt{3}(\cos 15^\circ+i\sin 165^\circ)$;　　(4) $-\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi$.

§4·5　复数的加法和减法

我们已经知道，一个复数 z 可以用复数的代数式 $a+bi$ 或者复数的三角函数式 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 来表示；并且知道，复数 z 就对应着平面内的一个点 $M(a, b)$，或者一个向量 $\overrightarrow{OM}$，由此使复数得到了几何解释。

在这基础上，现在就可以来建立复数的各种运算的法则，并且对复数的各种运算作出几何的解释．本节先研究复数的加法和减法．

1．复数加法和减法的法则　复数的加法和减法，可以按照多项式的加法和减法的法则来进行．就是：实部和实部相加减，虚部和虚部相加减．用式子表示即是：

$$(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{i})\pm(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{i})=(\boldsymbol{a}_1\pm\boldsymbol{a}_2)+(\boldsymbol{b}_1\pm\boldsymbol{b}_2)\boldsymbol{i}.$$

例1． 计算：

(1) $(1-i)+(2-i^3)+(3-i^5)+(4-i^7)$；

(2) $(\sqrt[3]{-8}+2\sqrt{2}\,i)-(\sqrt{2}\,i-2)$．

【解】 (1) 原式$=(1-i)+(2+i)+(3-i)+(4+i)$

$$=(1+2+3+4)+(-1+1-1+1)i$$

$$=10.$$

(2) 原式$=(-2+2\sqrt{2}\,i)+(2-\sqrt{2}\,i)$

$$=(-2+2)+(2\sqrt{2}-\sqrt{2})i$$

$$=\sqrt{2}\,i.$$

注意　复数的和，或者差，仍旧是复数．在特殊情况下，这种复数可能就是实数或者纯虚数．

例2． 计算 z_1 与 z_2 的和，已知

$$z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right),$$

$$z_2=4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

【解】 $z_1=2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=1+\sqrt{3}\,i,$

$$z_2=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2\sqrt{3}+2i,$$

$$\therefore\quad z_1+z_2=(1+2\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})i.$$

说明 复数用三角函数式表示时，欲求它们的和或差，一般要先把它们改用代数式表示，这样可使计算比较简单．题中如无其他要求，求到的和或差，可以不必再化成复数的三角函数式．

例 3． 设 $(x+2yi)+(y-3xi)-(5-5i)=0$，求实数 x、y 的值．

分析 先把左边化简成 $a+bi$ 的形式．从 $a+bi=0$ 得 $a=0$，$b=0$．即可列出关于 x，y 的方程组，从而求出 x，y 的实数值．

【解】 $\because \quad (x+2yi)+(y-3xi)-(5-5i)=0,$

$\therefore \quad (x+y-5)+(2y-3x+5)i=0.$

既然 x，y 均为实数，所以，根据复数相等的规定，有

$$\begin{cases} x+y-5=0, \\ 2y-3x+5=0. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$x=3, \quad y=2.$$

习　题　4·5(1)

1．计算：

(1) $\left(\frac{2}{3}+i\right)+\left(1-\frac{2}{3}i\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}i\right)$；

(2) $(-\sqrt{2}+\sqrt{3}i)+(\sqrt{3}-\sqrt{2}i)$
$\quad -[(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{3}+\sqrt{2})i]$；

(3) $[(a+b)+(a-b)i]-[(a-b)-(a+b)i]$ （a，b 均为实数）；

(4) $(2x+3yi)-(3x-2yi)+(y-2xi)-3xi$ （x，y 均为实数）；

(5) $(1-3i^7)+(2+4i^9)-(3-5i^3)$．

2．计算：

(1) $(\cos 210°+i\sin 210°)+(\cos 120°+i\sin 120°)$；

(2) $3(\cos 60°+i\sin 60°)-2(\cos 180°+i\sin 180°)$
$\quad +\left(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$．

3．求实数 x 和 y 的值：

(1) $(2+5xi)-3yi-(14i+3x-5y)=0$;

(2) $(x+xi)+(y-yi)-(-3+i)=0$;

(3) $\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}i\right)+\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{y}i\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{5}{y}i\right)=0$.

4．求证：两个共轭虚数的和是实数，差是纯虚数．

*5．设 z 是复数，解下列关于 z 的方程：

(1) $2z+\bar{z}-6i=6-3i$;　　　　(2) $|z|-z=1+2i$.

[提示：设 $z=x+yi$，代入方程，从而解出 x 和 y.]

***2．复数加、减法的几何解释**　利用复数与向量间的对应关系，对复数的加法和减法的意义，不难作出几何的解释．

想必读者已经知道，物理学里象力、速度这些量，都是向量（也称做矢量）；对于两个向量，可以应用平行四边形法则进行加法运算．例如，图4·8中 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 表示作用于同一点 O 的两个力；用表示这两个力的有向线段 $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$ 作为邻边，画出平行四边形，那末通过这个作用点 O 的对角线 $\overrightarrow{OM}$ 就表示这两个力的合力 $\boldsymbol{F}$．这就是说：

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}.$$

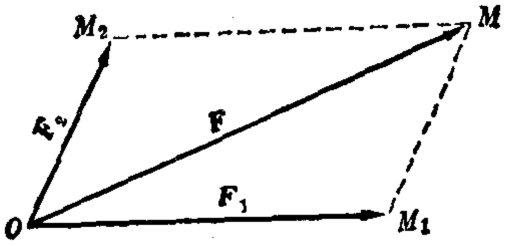


图　4·8

现在，我们来证明：如果向量 $\overrightarrow{OM_1}$ 与 $\overrightarrow{OM_2}$ 所对应的复数分别是：

$$z_1=a_1+b_1i,\quad z_2=a_2+b_2i,$$

那末这两个向量的和 $\overrightarrow{OM}$ 所对应的复数 z，正就是上面所规定的复数 z_1 与 z_2 的和 $(a_1+b_1)+(a_2+b_2i)$．

【证】 OM_1MM_2 是平行四边形（图4·9），点 M_1 的坐标是 (a_1, b_1)，点 M_2 的坐标是 (a_2, b_2)．

作 x 轴的垂线 M_1N_1, M_2N_2 和 MN，并且作 $M_1S\perp MN$．容易证明，这时有

$$\triangle M_1SM\cong\triangle ON_2M_2,$$

四边形 M_1N_1NS 是矩形．

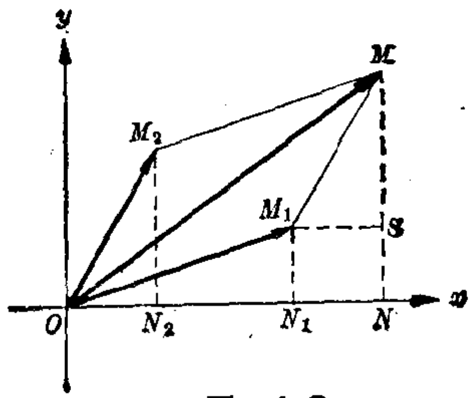


图　4·9

于是，

$$ON=ON_1+N_1N=ON_1+M_1S=ON_1+ON_2=a_1+a_2,$$
$$NM=NS+SM=N_1M_1+N_2M_2=b_1+b_2.$$

由此得 M 的坐标是$(a_1+a_2,\ b_1+b_2)$．从而可知，向量 $\overrightarrow{OM}$ 对应复数

$$(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i.$$

这样，复数的加法就得到了几何解释．

如果先作出与 z_1 对应的向量 $\overrightarrow{OM_1}$，与 z_2 对应的向量 $\overrightarrow{OM_2}$，然后，以 OM_1 为对角线，以 OM_2 为一边，作平行四边形 OM_2M_1M (图 4·10)，容易证明 $\overrightarrow{OM}$ 就对应着 z_1 与 z_2 的差

$$(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i.$$

这样，复数的减法也就得到了几何的解释．

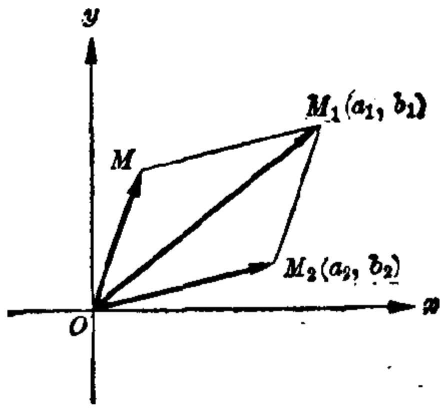


图 4·10

理解了复数加减法的几何解释，就可以应用复数这一工具来解一些实际问题．

例 4．两个力都等于 6 公斤，作用于一点，并成120° 角．求它们的合力．

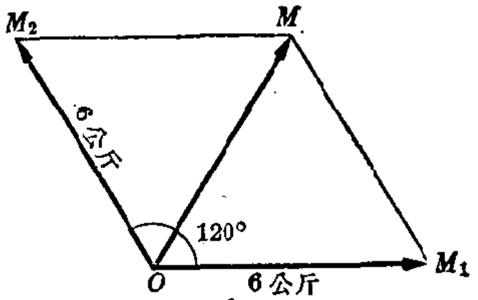


图 4·11

分析 根据力的合成法则，这个问题可以用图解法解出，解法如下：

作 ▱OM_1MM_2，使

$$OM_1=OM_2=6\text{ 厘米},$$
$$\angle M_1OM_2=120^\circ.$$

量出 OM 的长度，得6厘米．量出 $\angle M_1OM$ 的大小，得 60°．由此可知，所求的合力是 6 公斤，它与这两个力都成 60° 角．

从上面的解法中可以看出，如果把作用点 O 作为坐标系的原点，$\overrightarrow{OM_1}$ 所在直线作为 x 轴，那末这两个力就可以分别用复数

$$\boldsymbol{f}_1:\quad z_1=6(\cos 0^\circ+i\sin 0^\circ),$$
$$\boldsymbol{f}_2:\quad z_2=6(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)$$

来表示．由此可知，只要求出 z_1 与 z_2 的和 z，那末，z 的模数就表示合

力 f 的大小; z 的辐角就表示力 f_1 与合力 f 间的夹角，从而确定了合力 f 的方向. 这样，就得到下面的复数解法.

【解】 设力 f_1 与 f_2 分别对应着复数

$$z_1=6(\cos 0°+i\sin 0°)=6,$$

$$z_2=6(\cos 120°+i\sin 120°)=-3+3\sqrt{3}i.$$

那末它们的合力 f 所对应的复数就是

$$z=z_1+z_2=3+3\sqrt{3}i.$$

可以求得

$$|z|=\sqrt{9+27}=6;$$

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}, \quad \therefore \quad \theta=60°.$$

由此可知，合力 f 是 6 公斤，且与力 f_1 成 60° 角.

注 为了叙述上的简便，"力 f_1 对应着复数 $z_1=6(\cos 0°+i\sin 0°)$" 也可以直接用

$$f_1=6(\cos 0°+i\sin 0°)$$

来表示.

例 5. 有作用于一点的两个力 f_1 和 f_2，已知它们的大小分别是 14.14 公斤和 20.00 公斤，方向分别是北 45° 东、南 60° 东，求它们的合力.

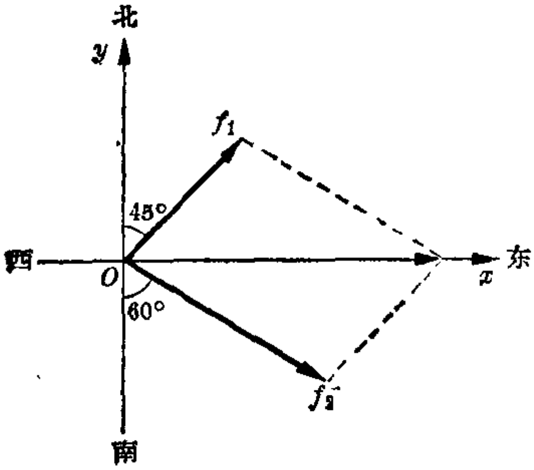


图 4·12

【解】 取作用点为原点，从西向东方向作为 x 轴的正方向(图 4·12). 则

$$f_1=14.14(\cos 45°+i\sin 45°)$$

$$\approx 10\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

$$=10+10i,$$

$$f_2=20.00[\cos(-30°)+i\sin(-30°)]=10\sqrt{3}-10i.$$

$$\therefore \quad f=f_1+f_2=10(1+\sqrt{3})-0i.$$

$$\therefore \quad |f|=10(1+\sqrt{3})\approx 27.32,$$

$$\theta=0°.$$

由此可知，合力 f 的大小为 27.32 公斤，它的方向为正东.

*习 题 4·5(2)

1. 用几何方法作下列加减法:

(1) $(4+5i)+(2+3i)$; (2) $(4+5i)-(2+3i)$;

(3) $(\cos 210°+i\sin 210°)+2(\cos 120°+i\sin 120°)$;

(4) $2(\cos 120°+i\sin 120°)-3(\cos 135°+i\sin 135°)$.

2. 设有平行四边形 $ABCD$, 它的三个顶点 A、B、D 可以分别用复数 $0+0i$、$2+0i$、$1+i$ 来表示,试考虑下述问题:

(1) 画出这个平行四边形;

(2) 用复数来表示它的另一顶点 C;

(3) 求对角线 AC 的长;

(4) 求对角线 BD 的长.

[提示: 把 $\overrightarrow{BD}$ 平行移动到 $\overrightarrow{AE}$ 的位置,则 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$.]

3. 在第Ⅰ象限里有一个锐角是 30° 的直角三角形, 它的直角顶点和 30° 角的顶点可以分别用复数

$$z_1=\sqrt{3}+0i,\quad z_2=2\sqrt{3}+i$$

来表示. 求表示第三个顶点的复数.

4. 有两力 $f_1=30.00$ 公斤、$f_2=40.00$ 公斤作用于一点, 它们的夹角是 60°, 求合力的大小.

§4·6 复数的乘法

1. 复数乘法的法则 象复数的加减法一样,复数的乘法也可以按照多项式乘法的法则来进行, 在所得的结果中把 i^2 换成 -1, 并且把实数和纯虚数分别合并.

用式子来表示,就是

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i.$$

例 1. 计算 $(1+i)(4-i^3)(2+3i^5)$.

【解】 $(1+i)(4-i^3)(2+3i^5)=(1+i)(4+i)(2+3i)$

$$=(3+5i)(2+3i)=-9+19i.$$

例 2. 验证

$$x^4+4=(x-1-i)(x-1+i)(x+1-i)(x+1+i).$$

【证】 $(x-1-i)(x-1+i)(x+1-i)(x+1+i)$

$$=[(x-1)^2-i^2][(x+1)^2-i^2]$$

$$=(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)=x^4+4.$$

原式得证.

例 3. 设 x、y 是实数，解方程

$$(1+2i)(x+yi)+(2y-2xi)=-5+3i.$$

【解】 原方程可化为

$$(x-2y)+(2x+y)i+(2y-2xi)=-5+3i,$$

即
$$x+yi=-5+3i.$$

因为 x、y 是实数，按复数相等的规定，有

$$x=-5,\qquad y=3.$$

习 题 4·6(1)

1．计算:

(1) $(-5+6i)(-3i)$;

(2) $(-3-4i)(2+3i)$;

(3) $(0.1+0.3i)(-0.1-0.4i)$;

(4) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.

2．已知 $a>b>0$，计算:

(1) $(a+\sqrt{b}\,i)(a-\sqrt{b}\,i)(-a+\sqrt{b}\,i)(-a-\sqrt{b}\,i)$;

(2) $\sqrt{b-a}(\sqrt{a-b}-\sqrt{b-a})$.

[提示: $\sqrt{b-a}=\sqrt{a-b}\,i$.]

3．(1)证明$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$;

(2) 应用上面这个公式，分解下列各式为一次因式的积:

(i) x^2+4,　　(ii) x^4-a^4　(a 为实数),

(iii) x^2+2x+2,　　(iv) x^2+x+1.

[解法举例：(iii) $x^2+2x+2=(x^2+2x+1)+1=(x+1)^2-i^2$

$$=(x+1+i)\cdot(x+1-i).]$$

4. 已知 x、y 均为实数，解下列各方程：

(1) $(x+yi)i-2+4i=(x-yi)(1+i)$;

(2) $(x+1)+(y-3)i=(1+i)(5+3i)$.

2. 复数三角函数式的乘法运算 我们来计算复数

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),$$
$$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$

的积.

根据上面所述的复数乘法法则，容易算出：

$$\begin{aligned}z_1z_2&=r_1r_2(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\\&=r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)\\&\qquad+(\cos\theta_1\sin\theta_2+\sin\theta_1\cos\theta_2)i].\end{aligned}$$

根据三角学中的知识，知道：

$$\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2=\cos(\theta_1+\theta_2),$$
$$\cos\theta_1\sin\theta_2+\sin\theta_1\cos\theta_2=\sin(\theta_1+\theta_2).$$

代入上式，即得

$$z_1z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)].$$

这就是说，两复数相乘时，积的模数等于因数模数的积，而积的辐角等于因数的辐角的和.

从这个法则可以看出，在复数相乘时把它们表示成三角函数式后进行计算就比较简便.

例 4. 已知

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),$$
$$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2),$$
$$z_3=r_3(\cos\theta_3+i\sin\theta_3),$$

求 $z_1z_2z_3$.

【解】 $\because\quad z_1z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$,

$$\therefore \quad z_1z_2z_3=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

$$\cdot r_3(\cos\theta_3+i\sin\theta_3)$$

$$=r_1r_2r_3[\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3)+i\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3)].$$

由例4容易看出,对于 n 个复数

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),$$

$$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$z_n=r_n(\cos\theta_n+i\sin\theta_n)$$

的积,可以用下式直接写出:

$$z_1z_2\cdots z_n=r_1r_2\cdots r_n[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)$$

$$+i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)].$$

例 5. 计算

$$3(\cos 18^\circ+i\sin 18^\circ)\cdot 2(\cos 54^\circ+i\sin 54^\circ)$$

$$\cdot 5(\cos 108^\circ+i\sin 108^\circ).$$

【解】

$$3(\cos 18^\circ+i\sin 18^\circ)\cdot 2(\cos 54^\circ+i\sin 54^\circ)$$

$$\cdot 5(\cos 108^\circ+i\sin 108^\circ)$$

$$=30[\cos(18^\circ+54^\circ+108^\circ)+i\sin(18^\circ+54^\circ+108^\circ)]$$

$$=30(\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ)=-30.$$

例 6. 化简 $(\cos 3\theta-i\sin 3\theta)(\cos 2\theta-i\sin 2\theta)$.

分析 这里的两个因式,都还不是复数的三角函数式,所以要先把它们化成复数的三角函数式,才能应用上面的法则.

【解】

$$(\cos 3\theta-i\sin 3\theta)(\cos 2\theta-i\sin 2\theta)$$

$$=[\cos(-3\theta)+i\sin(-3\theta)][\cos(-2\theta)+i\sin(-2\theta)]$$

$$=\cos(-3\theta-2\theta)+i\sin(-3\theta-2\theta)$$

$$=\cos(-5\theta)+i\sin(-5\theta).$$

习 题 4·6(2)

1. 计算:

(1) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)\cdot\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$;

(2) $8\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)$;

(3) $(1-i)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left[\cos\left(\frac{5\pi}{12}-\theta\right)-i\sin\left(\frac{5\pi}{12}-\theta\right)\right]$;

(4) $2(\cos 12^\circ+i\sin 12^\circ)\cdot 3(\cos 78^\circ+i\sin 78^\circ)$

$$\cdot\frac{1}{6}(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ).$$

2. 证明:

(1) $3(\cos 75^\circ-i\sin 75^\circ)(\cos 15^\circ-i\sin 15^\circ)=-3i$;

(2) $(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)(\cos 2\theta-i\sin 2\theta)$

$$=(\cos 5\theta+i\sin 5\theta)(\cos 4\theta-i\sin 4\theta).$$

***3. 复数乘法的几何解释** 根据复数三角函数式的乘法法则,不难作出复数乘法的几何解释.

设复数 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$, $z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$分别与向量 $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$ 对应. 它们的积

$$z=z_1\cdot z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

与向量 $\overrightarrow{OM}$ 对应(图 4·13).

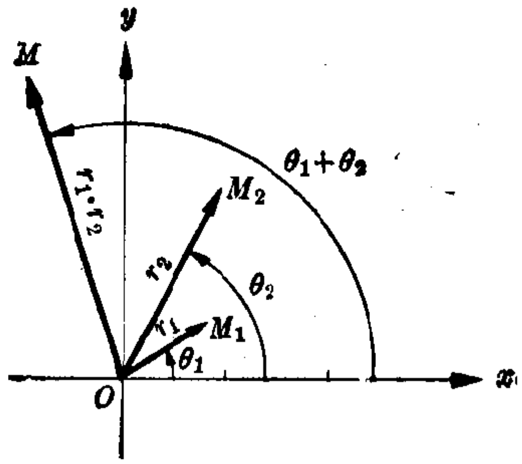


图 4·13

从图中可以看出，复数 z_1 乘以复数 z_2 的几何意义就是：把 z_1 所对应的向量 $\overrightarrow{OM_1}$ 先按照 z_2 的辐角 θ_2 旋转一个角 θ_2，再把 $\overrightarrow{OM_1}$ 的长度按照 z_2 的模数 r_2 改变 r_2 倍，所得到的一个新的向量 $\overrightarrow{OM}$，即是复数 $z_1 \cdot z_2$ 所对应的向量.

*例 7. 用几何的方法做下面的乘法：

$$2(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)\cdot 3(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ),$$

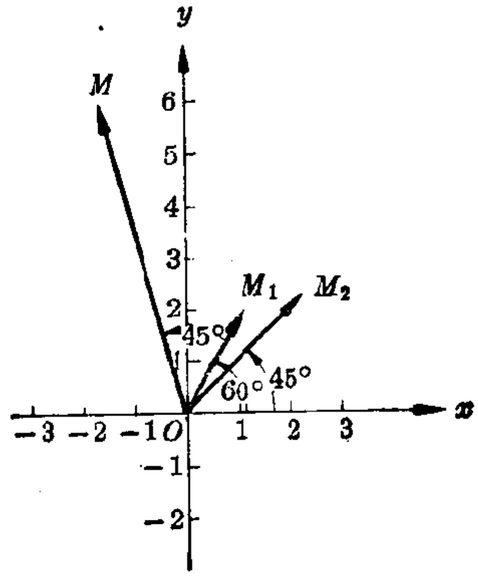


图 4·14

并用复数的代数式表示求得的结果.

【解】 作出复数 $2(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$ 与复数 $3(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$ 的向量 $\overrightarrow{OM_1}$ 与 $\overrightarrow{OM_2}$，将向量 $\overrightarrow{OM_1}$ 旋转 45° 的角并且伸长 3 倍，得到新的向量 $\overrightarrow{OM}$，它所对应的复数 $-1.6+5.8i$ 即为所求的积.

*习 题 4·6(3)

下列各题中，作出复数 z_1 与 z_2 以及它们的积 z 所对应的向量：

1. $z_1 = 2(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)$, $\quad z_2 = 3(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$.
2. $z_1 = 2\sqrt{2}(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ)$,
   $z_2 = \sqrt{2}(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)$.
3. $z_1 = 1 - i$, $\quad z_2 = 2(\cos 75^\circ + i\sin 75^\circ)$.
4. $z_1 = 2 + i$, $\quad z_2 = 4 + 3i$.

§4·7 复数的除法

在习题 4·6(1) 的第 3 题，曾经证明过：

$$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2.$$

这就是说，两个共轭复数的积是一个实数．根据这一性质，就可以应用复数乘法的法则来做复数的除法．

设 $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i$, 并设 $z_2\neq 0$, 那末

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)}$$

$$=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i.$$

这就是说：两个复数相除(除数不为零)，可以先把它们写成分式的形式，然后将分子分母同乘以分母的共轭复数，并且把结果化简．

例 1．计算 $\dfrac{18-i}{4-3i}+i(3-5i)-\dfrac{55+3i}{5+7i}$.

【解】

$$原式=\frac{(18-i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)}+3i-5i^2-\frac{(55+3i)(5-7i)}{(5+7i)(5-7i)}$$

$$=\frac{75+50i}{25}+3i+5-\frac{296-370i}{74}$$

$$=3+2i+3i+5-4+5i$$

$$=4+10i.$$

如果复数用三角函数式来表示，那末计算它们的商就非常方便．

设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$,

$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$, $\quad z_2\neq 0$.

那末

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\left[\frac{(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)}{\cos^2\theta_2+\sin^2\theta_2}\right.$$

$$\left.+\frac{i(\sin\theta_1\cos\theta_2-\cos\theta_1\sin\theta_2)}{\cos^2\theta_2+\sin^2\theta_2}\right]$$

$$=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)].$$

这就是说：两个用三角函数式表示的复数相除，商的模数等于被除数的模数除以除数的模数，商的辐角等于被除数的辐角减去除数的辐角.

例 2. 计算

$$12\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)\div 6\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

【解】

$$12\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)\div 6\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$=\frac{12}{6}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$=2\left(\cos\frac{13\pi}{12}+i\sin\frac{13\pi}{12}\right).$$

例 3. 求证

$$\frac{(1-\sqrt{3}\,i)(\cos\theta+i\sin\theta)}{(1-i)(\cos\theta-i\sin\theta)}$$

$$=\sqrt{2}\left[\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{12}\right)\right].$$

【证】

$$\text{左边}=\frac{2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)(\cos\theta+i\sin\theta)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]}$$

$$=\frac{2\left[\cos\left(\theta+\frac{5\pi}{3}\right)+i\sin\left(\theta+\frac{5\pi}{3}\right)\right]}{\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{4}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{4}-\theta\right)\right]}$$

$$=\sqrt{2}\left[\cos\left(\theta+\frac{5\pi}{3}-\frac{7\pi}{4}+\theta\right)\right.$$

$$\left.+i\sin\left(\theta+\frac{5\pi}{3}-\frac{7\pi}{4}+\theta\right)\right]$$

$$=\sqrt{2}\left[\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{12}\right)\right]=\text{右边}.$$

注 从上面所述的复数三角函数式的除法运算法则

$$\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}$$

$$=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)],$$

读者可以利用图 4·15，自己来解释复数除法的几何意义.

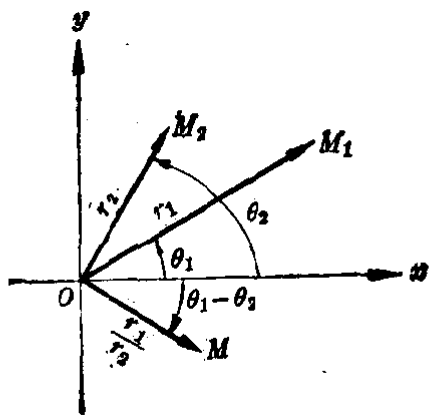


图 4·15

习 题 4·7

1．做下列除法:

(1) $\frac{2i}{1-i}$;　　(2) $\frac{1-2i}{3+4i}$;

(3) $\frac{1+2i}{2-4i}$;

(4) $\dfrac{\sqrt{3}(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ)}{\sqrt{3}(\cos 225^\circ + i\sin 225^\circ)}$;

(5) $\dfrac{-i}{\sqrt{2}(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)}$.

2. 计算:

(1) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}\,i}{\sqrt{5}-\sqrt{3}\,i}-\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}\,i}{\sqrt{3}-\sqrt{5}\,i}$;

(2) $\dfrac{9+3\sqrt{2}\,i}{(3+\sqrt{2}\,i)(1+i)}$.

3. 设 z 是复数,解方程:

(1) $\left(4-\dfrac{3}{2}i\right)z=27-i$;　　　　(2) $\dfrac{1}{2}(z-1)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1+z)i$.

4. 设 u, v 是复数,解方程组

$$\begin{cases}(1-i)u+(2+i)v=7,\\(3+2i)u-(2-3i)v=13i.\end{cases}$$

*5. (1) 求证 $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$;

(2) 设 x, y 都是实数,求

$$\left|\frac{x^2-y^2+2xyi}{xy\sqrt{2}+\sqrt{x^4+y^4}\,i}\right|.$$

§4·8 复数的乘方

把复数 $a+bi$ 看成是一个二项式,那末就可以应用§3·2的二项式定理来计算复数的乘方. 这里须注意,在所得的展开式里,把 i 的幂都化简,并且把实数和纯虚数分别合并.

例 1. 计算:

(1) $(2+3i)^4$;　　　　(2) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^6$.

【解】

(1) $(2+3i)^4=2^4+4(2^3)(3i)$
$$+6(2^2)(3i)^2+4(2)(3i)^3+(3i)^4$$
$$=16+96i+216i^2+216i^3+81i^4$$
$$=16+96i-216-216i+81$$
$$=-119-120i.$$

(2) $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^6=\frac{1}{2^6}(\sqrt{3}+i)^6$
$$=\frac{1}{2^6}[(\sqrt{3})^6+6(\sqrt{3})^5 i+15(\sqrt{3})^4 i^2$$
$$+20(\sqrt{3})^3 i^3+15(\sqrt{3})^2 i^4+6\sqrt{3}\,i^5+i^6]$$
$$=\frac{1}{64}[(27-135+45-1)+(54-60+6)\sqrt{3}\,i]$$
$$=\frac{1}{64}(-64)=-1.$$

例 2. 化简 $\dfrac{(1+2i)^2}{1-i}-\dfrac{(2-i)^2}{1+i}$.

【解】 原式$=\dfrac{-3+4i}{1-i}-\dfrac{3-4i}{1+i}$
$$=(-3+4i)\left(\frac{1}{1-i}+\frac{1}{1+i}\right)$$
$$=(-3+4i)\frac{2}{(1-i)(1+i)}$$
$$=-3+4i.$$

习 题 4·8(1)

1. 计算:

(1) $(3-2i)^4$; (2) $(2+i)^6$;

(3) $(-1-i)^{-6}$; (4) $\left(\dfrac{2+2i}{1-\sqrt{3}\,i}\right)^4$.

2．化简：

(1) $(1+2i)^5+(1-2i)^5$；　　　　(2) $\dfrac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$.

3．计算：

(1) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{4n+2}$；　　　　(2) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{4n+1}$.

$\left[\text{提示：}\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{1-i^2}=i.\right]$

4．设 $\omega_1=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$，$\omega_2=\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$，求证：

(1) $\omega_1^3=\omega_2^3=1$；　　　　(2) $\omega_1^2=\omega_2$；

(3) $\omega_2^2=\omega_1$；　　　　(4) $1+\omega_1+\omega_1^2=1+\omega_2+\omega_2^2=0$.

注　从(1)可以看出，ω_1 和 ω_2 都是 $x^3=1$ 的根．本题的结论，在以后解题时很有用．

在§4·6里，曾谈到复数用三角函数式表示时做乘法就非常简便．乘方是乘法的一种特殊运算，所以也就容易想到：把复数先用三角函数式表示，再来做复数的乘方，同样非常简便．

设 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，现在来计算 z 的 n 次幂

$$(r\cos\theta+i\sin\theta)^n.$$

在§4·7例4的后面，曾经有过下面这个乘法公式：

$$\begin{aligned}z_1z_2\cdots z_n&=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\\&\quad\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\cdots r_n(\cos\theta_n+i\sin\theta_n)\\&=r_1r_2\cdots r_n[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)\\&\qquad+i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)].\end{aligned}$$

在这个公式里，令

$$r_1=r_2=\cdots=r_n=r,$$
$$\theta_1=\theta_2=\cdots=\theta_n=\theta.$$

这时，就有

$$z_1=z_2=\cdots=z_n=z.$$

从而有

$$z^n=[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta).$$

这里 n 是自然数. 这就是说，复数的 n 次幂（n 是正整数）的模数，等于这个复数的模数的 n 次幂，它的辐角等于这个复数的辐角的 n 倍.

这一法则称为**棣美弗定理**.

例 3. 计算 $(1+\sqrt{3}i)^{10}$.

【解】

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{3}i)^{10}&=\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^{10}\\&=2^{10}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{10}\\&=2^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{3}+i\sin\frac{10\pi}{3}\right)\\&=1024\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\&=-512-512\sqrt{3}i.\end{aligned}$$

注 本题如果应用二项式定理来计算，显然运算过程就要繁复得多.

习 题 4·8(2)

1. 用棣美弗定理计算:

(1) $[3(\cos 18^\circ+i\sin 18^\circ)]^5$;　(2) $\left[3\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^6$;

(3) $(2+2i)^8$;　(4) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^{12}$.

2. 计算:

(1) $(\sqrt{3}i-1)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{20}$;　(2) $\frac{(\sqrt{3}-i)^5}{\sqrt{3}+i}$;

(3) $\frac{(1+i)^5}{1-i}+\frac{(1-i)^5}{1+i}$;

(4) $\dfrac{(-1+\sqrt{3}i)^{15}}{(1-i)^{20}}+\dfrac{(-1-\sqrt{3}i)^{15}}{(1+i)^{20}}$.

[解法举例：(1) 令 $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\omega$，则

$$\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{20}=\omega^{20}=(\omega^{3})^{6}\cdot\omega^{2}=\omega^{2}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

[习题 4·8(1) 第 4 题].

$$\therefore\quad 原式=(\sqrt{3}i-1)\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i)(-1-\sqrt{3}i)$$

$$=\frac{1}{2}(1+3)=2.]$$

下面再举几个应用棣美弗定理来解题的例子.

*例 4. 已知 n 是自然数，且 $(1+i)^n$ 是实数. 试问 n 的最小值是什么？这个实数是什么？

分析 应用棣美弗定理，把 $(1+i)^n$ 用复数的三角函数式表出，令虚部系数等于 0，即可求出 n 的最小值.

【解】 $\because\quad 1+i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$，

$$\therefore\quad (1+i)^n=(\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right).$$

要使 $(1+i)^n$ 为实数，必须并且只须 $\sin\dfrac{n\pi}{4}=0$.

$$\therefore\quad n=4k\quad(k\ 是任意整数).$$

要使 n 是最小的自然数，只须使 $k=1$.

$$\therefore\quad n=4.$$

这时，

$$(1+i)^n=(1+i)^4=(\sqrt{2})^4(\cos\pi+i\sin\pi)=-4.$$

注 如果要使 $(1+i)^n$ 是正实数，应该怎样解？要使 $(1+i)^n$ 是纯虚数呢？

*例 5. 用 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 的代数式来表示 $\sin 5\theta$ 和 $\cos 5\theta$.

分析 根据棣美弗定理，有

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^5=(\cos 5\theta+i\sin 5\theta),$$

应用二项式定理把左边的式子展开，并化简，这样就可以根据复数相等的意义，求得 $\cos 5\theta$ 和 $\sin 5\theta$ 的表达式.

【解】 设 $z=\cos\theta+i\sin\theta$，则

$$
\begin{aligned}
z^5 &= \cos 5\theta+i\sin 5\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^5\\
&=\cos^5\theta+5\cos^4\theta\cdot\sin\theta\cdot i+10\cos^3\theta\sin^2\theta\cdot i^2\\
&\quad+10\cos^2\theta\cdot\sin^3\theta\cdot i^3+5\cos\theta\sin^4\theta\cdot i^4+\sin^5\theta\cdot i^5\\
&=(\cos^5\theta-10\cos^3\theta\sin^2\theta+5\cos\theta\sin^4\theta)\\
&\quad+(5\cos^4\theta\sin\theta-10\cos^2\theta\sin^3\theta+\sin^5\theta)i.
\end{aligned}
$$

$$
\therefore\quad \cos 5\theta=\cos^5\theta-10\cos^3\theta\sin^2\theta+5\cos\theta\sin^4\theta;
$$

$$
\sin 5\theta=\sin^5\theta-10\cos^2\theta\sin^3\theta+5\cos^4\theta\sin\theta.
$$

注 应用公式 $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$、$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$，还可用 $\cos\theta$ 的有理代数式来表示 $\cos 5\theta$，用 $\sin\theta$ 的有理代数式来表示 $\sin 5\theta$. 具体的推导留给读者.

*习　题　4·8(3)

1. 设 n 是正整数，求证：

(1) $(\cos\theta+i\sin\theta)^{-n}=\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)$;

(2) $(\cos\theta-i\sin\theta)^n=\cos n\theta-i\sin n\theta$.

2. 求最小的正整数 n，使 $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i}\right]^n$ 是实数，并求这个实数的值.

3. 设 $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^n=1$，求最小的正整数 n.

[提示：$\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{2i}{2}=i$，所以本题不必用棣美弗定理.]

4. 设 $\dfrac{(1+i)^{2n}}{1-i}+\dfrac{(1-i)^{2n}}{1+i}=2^n$，求最小的正整数 n.

5. 用棣美弗定理和复数相等的条件，证明：

(1) $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$，$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$;

(2) $\cos 3\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta$，$\sin 3\theta=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta$.

*6. 运用棣美弗定理、复数相等的条件，以及二项式定理，试求 $\sin n\theta$ 和 $\cos n\theta$ 用 $\sin\theta$, $\cos\theta$ 表示的公式.

§4·9 复数的开方

象实数开方的意义一样，如果复数 w 的 n 次幂等于另一个复数 z，即 $w^n=z$，那末 w 就称为 z 的 n 次方根. 求复数 z 的 n 次方根的运算，称为把复数 z 开 n 次方.

例如：因为 $i^2=-1$、$(-i)^2=-1$，所以 i 和 $-i$ 都是 -1 的二次方根；

又如：因为

$$1^3=1、\left(\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^3=1、\left(\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^3=1,$$

所以 1、$\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ 和 $\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$ 都是 1 的三次方根.

这里可以看到，在复数范围里，负数也可以开偶次方，正数的奇次方根也不只有唯一的值.

本节将根据开方是乘方的逆运算这一关系，利用棣美弗定理来导出复数开方的一般法则. 由此说明：任何一个复数都可以开 n 次方，并且，任一非零复数的 n 次方根都有 n 个值.

1. 复数开方的法则 先来计算一个具体的题目.

求复数 $z=1+\sqrt{3}\,i$ 的平方根.

为了能应用棣美弗定理，先把这个复数写成三角函数式：$z=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$，并且设所求的平方根是

$$w=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

那末，根据方根的意义：$w^2=z$，就有

$$[\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^2=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right),$$

就是

$$\rho^2(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

因为，两个复数相等时，它们的模数必须相等，而辐角可以相差 2π 的整数倍，所以

$$\begin{cases}\rho^2=2,\\ 2\varphi=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi \quad (k\text{ 是整数}).\end{cases}$$

由此可知，

$$\begin{cases}\rho=\sqrt{2} \quad (\text{因为 }\rho\text{ 是模数，所以只取算术根}),\\ \varphi=\dfrac{\pi}{6}+k\pi.\end{cases}$$

这样，即得所求的平方根是

$$w=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+k\pi\right)\right],$$

这里 k 是整数.

为了确定所求的平方根究竟有几个，不妨试取 k 的一些值代入计算．例如：

当 $k=0$ 时，得

$$w_0=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{6}+\frac{1}{2}\sqrt{2}\,i;$$

当 $k=1$ 时，得

$$w_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi\right)=-\frac{1}{2}\sqrt{6}-\frac{1}{2}\sqrt{2}\,i.$$

正弦函数、余弦函数都是以 2π 为周期的函数，所以，倘使取 k 的其他值 ±2, ±4, ±6, …代入，求得的结果都与 w_0 相同；取 k 的其他值 ±1, ±3, ±5, …代入，求得的结果都与 w_1 相同．由此可知，$1+\sqrt{3}\,i$ 的平方根有两个值，并且只有

两个值，它们可以用式子

$$\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+k\pi\right)\right] \quad (k=0,\ 1)$$

来表示.

一般地，设复数 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(z\neq0)$ 的 n 次方根是 $w=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. 那末，从 $w^n=z(z\neq0)$，可得

$$\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=r(\cos\theta+i\sin\theta).$$

由此，根据复数相等的意义，有

$$\begin{cases}\rho^n=r,\\ n\varphi=\theta+2k\pi \quad (k\text{ 为整数}).\end{cases}$$

从而有

$$\begin{cases}\rho=\sqrt[n]{r},\\ \varphi=\dfrac{\theta+2k\pi}{n}.\end{cases}$$

$$\therefore\quad w_k=\sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right],$$

这里 $\sqrt[n]{r}$ 表示 r 的 n 次算术根，k 只需取 0, 1, 2, …, $n-1$ 这 n 个值.（想一想，这是为什么？）

为了方便起见，采用符号 $\sqrt[n]{z}$ 来表示复数 z 的各个 n 次方根，这样就有

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right]$$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1).$$

这就是说，复数的 n 次方根有 n 个值，它们的模数都等于这个复数的 n 次算术根，而它们的辐角分别等于这个复数的辐角与 2π 的 0, 1, 2, …, $n-1$ 倍的和的 n 分之一.

注意 在实数范围内和在复数范围内，记号 $\sqrt[n]{\ }$ 的意义有所不同. 例如：在实数范围里，$\sqrt{1}$ 只表示 1 的算术根 1，在复数范围里 $\sqrt{1}$

就表示 1 的两个平方根 ± 1. 又如: 在实数范围里, $\sqrt[3]{-1}$ 只表示实数 -1, 但在复数范围里, $\sqrt[3]{-1}$ 就表示 -1 的三个立方根 $-1, -\omega, -\omega^2$. 为了防止混淆, 以后如要用方根符号来表示实数 a 的 n 个 n 次方根, 宁可把 a 写成 $a+0i$ 的形式, 表示成 $\sqrt[n]{a+0i}$, 而仍旧把符号 $\sqrt[n]{a}$ (当它有意义时)来表示唯一的实数值.

例 1. 计算 $\sqrt{-1+i}$.

【解】 $-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$.

$$\therefore\quad w_k=\sqrt{-1+i}=\sqrt{\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)}$$

$$=\sqrt[4]{2}\left[\cos\frac{1}{2}\left(2k\pi+\frac{3}{4}\pi\right)+i\sin\frac{1}{2}\left(2k\pi+\frac{3}{4}\pi\right)\right]$$

$$=\sqrt[4]{2}\left[\cos\left(k\pi+\frac{3}{8}\pi\right)+i\sin\left(k\pi+\frac{3}{8}\pi\right)\right].$$

由此得

$$w_0=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{3}{8}\pi+i\sin\frac{3}{8}\pi\right),$$

$$w_1=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{11}{8}\pi+i\sin\frac{11}{8}\pi\right).$$

例 2. 在复数范围里, 解方程 $x^5+1=0$.

【解】 $x^5+1=0$,

$$x^5=-1,$$

$$\therefore\quad x^5=\cos\pi+i\sin\pi.$$

于是

$$x_k=\cos\frac{2k\pi+\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi+\pi}{5}$$

$$=\cos\frac{1}{5}(2k+1)\pi+i\sin\frac{1}{5}(2k+1)\pi$$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

由此得

$$x_0=\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5},$$

$$x_1=\cos\frac{3}{5}\pi+i\sin\frac{3}{5}\pi,$$

$$x_2=\cos\pi+i\sin\pi=-1,$$

$$x_3=\cos\frac{7}{5}\pi+i\sin\frac{7}{5}\pi,$$

$$x_4=\cos\frac{9}{5}\pi+i\sin\frac{9}{5}\pi.$$

习 题 4·9(1)

1. 计算:

(1) $\sqrt[4]{16\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)}$; (2) $\sqrt[6]{8(\cos 60^\circ-i\sin 60^\circ)}$.

2. 计算:

(1) $\sqrt{-i}$; (2) $\sqrt[4]{\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i}$;

(3) $\sqrt[6]{-1+\sqrt{3}\,i}$; (4) $\sqrt[5]{-3+3i}$.

3. (1) 求 -1 的三个立方根;

(2) 求 -64 的四个四次方根.

4. 设 a 为正实数, 应用复数开方的法则, 解下列关于复数 x 的方程:

(1) $x^3+a^3=0$; (2) $x^3-a^3=0$;

(3) $x^4+a^4=0$; (4) $x^4-a^4=0$.

5. 设 a、b、c 都是实数, 且 $b^2-4ac<0$. 解方程

$$ax^2+bx+c=0\quad(a\neq 0).$$

***2. 复数开方的几何解释** 根据复数开方的法则, 不难作出复数开方的几何解释.

设 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 的 n 个 n 次方根是

$$w_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{2k\pi+\theta}{n}+i\sin\frac{2k\pi+\theta}{n}\right),$$

其中 $k=0, 1, 2, \cdots, n-1$. 并设 w_k 在平面内对应的点是 M_k.

那末, 容易看出:

(1) 这些点与原点的距离都等于 $\sqrt[n]{r}$. 因此，这些点在以原点为中心、$\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆周上；

(2) 任意相邻两点(例如 M_0 与 M_1, M_1 与 M_2, ……)间的夹角都等于 $\frac{2\pi}{n}$. 因此，只要先作出对应于 w_0 的向量 $\overrightarrow{OM}_0$, 把它沿逆时针方向旋转角 $\frac{2\pi}{n}$, 就得对应于 w_1 的向量 $\overrightarrow{OM}_1$, 再旋转角 $\frac{2\pi}{n}$, 就得对应于 w_2 的向量 $\overrightarrow{OM}_2$, ……最后，把对应于 w_{n-2} 的向量 $\overrightarrow{OM}_{n-2}$ 旋转角 $\frac{2\pi}{n}$, 就得对应于 w_{n-1} 的向量 $\overrightarrow{OM}_{n-1}$.

由此，从几何观点来看，复数 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 的 n 个 n 次方根所对应的点，恰巧是以原点为中心，$\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆的一个内接正 n 多边形的顶点，其中第一个顶点（点 M_0）所对应的向量（向量 $\overrightarrow{OM_0}$）与 x 轴的正方向 $\overrightarrow{Ox}$ 间的夹角是 $\frac{1}{n}\theta$（以 $\overrightarrow{Ox}$ 为始边）.

例如，图 4·16 是当 $n=7$ 时的情况.

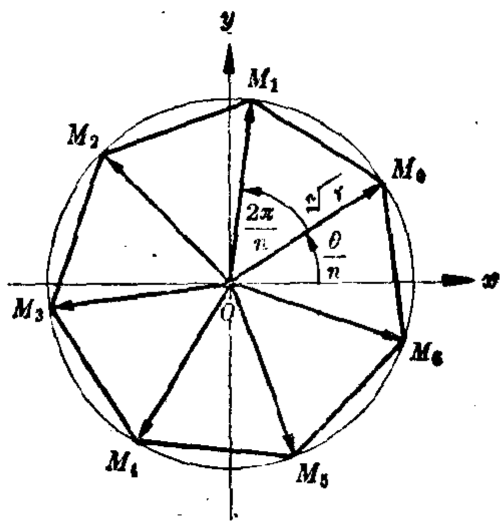


图 4·16

例 3. 根据复数开方的几何意义，试在复数平面内作出表示方程 $x^5-1=0$ 的五个根的点.

【解】 $\because\ x^5=1=\cos 0+i\sin 0,$

$\therefore\ x=\sqrt[5]{\cos 0+i\sin 0}.$

所以，它的五个根对应的点是一个以坐标系原点 O 为中心、其外接圆半径是 1 的正五边形的顶点 M_0, M_1, M_2, M_3, M_4. 先作出顶点

$$M_0=\cos 0+i\sin 0;$$

然后把向量 $\overrightarrow{OM}_0$ 沿逆时针方向旋转 72° 角，得到向量 $\overrightarrow{OM}_1$, 这就得到了顶点 M_1; 又把向量 $\overrightarrow{OM}_1$ 旋转 72° 角，从而得到顶点 M_2; 依次同样进行下去，即可得顶点 M_3, M_4.

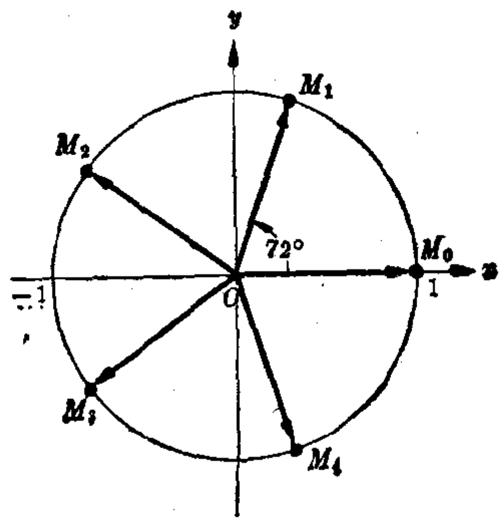


图 4·17

*习　题　4·9(2)

1．在复数平面内，作出表示：

(1) 1 的六次方根；　　　　(2) 1 的八次方根

的各点．

2．求方程 $x^4+1=0$ 的复数解，并证明这些解所对应的点构成一个正方形．

本 章 提 要

1．虚数单位 i

性质：(1) $i^2=-1$；

(2) i 与实数在一起可以按照通常四则运算的法则进行四则运算．

推论：i 的整数次幂具有周期性：

$$i^{4n+1}=i,\quad i^{4n+2}=-1,\quad i^{4n+3}=-i,\quad i^{4n+4}=1.$$

2．复数

定义：形如 $a+bi$ 的数（a、b 都是实数）．

几何意义：

(1) 表示平面上的点 $M(a, b)$；　(2) 表示平面上的向量 $\overrightarrow{OM}$．

3．复数的代数式与三角函数式的互化

$$z=a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta).$$

r——模数（绝对值）

$$r=|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

θ——辐角

确定辐角的公式：　$\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{a}{r},\\ \sin\theta=\dfrac{b}{r}.\end{cases}$

辐角的主值区间：　　$0\leqslant\theta'<2\pi$．

辐角的一般表示式：　$\theta=2k\pi+\theta'$　（k 是整数）．

4．复数的相等

(1) $a_1+b_1i=a_2+b_2i \longleftrightarrow \begin{cases} a_1=a_2, \\ b_1=b_2. \end{cases}$

(2) $r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2) \longleftrightarrow \begin{cases} r_1=r_2, \\ \theta_1=2k\pi+\theta_2. \end{cases}$

5. 共轭复数 $z=a+bi$ 和 $\bar{z}=a-bi$ 互为共轭复数.

6. 复数的运算

(1) 加法 $(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i.$

(2) 减法 $(a_1+b_1i)-(a_2+b_2i)=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i.$

(3) 乘法

(i) $(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(b_1a_2+a_1b_2)i.$

(ii) $r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

$$=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)].$$

(4) 除法

(i) $\dfrac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\dfrac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{a_2^2+b_2^2} \quad (a_2+b_2i\neq 0).$

(ii) $\dfrac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}=\dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$

$$(r_2\neq 0).$$

(5) 乘方

(i) 应用二项式定理.

(ii) 应用棣美弗定理

$$[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta).$$

(6) 开方

$$\sqrt[n]{r(\cos\theta+i\sin\theta)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{2k\pi+\theta}{n}+i\sin\frac{2k\pi+\theta}{n}\right)$$

$$(k=0, 1, 2, \cdots, n-1).$$

复 习 题 四

1. 计算:

(1) $i^{k+4}+i^{k+5}+i^{k+6}+i^{k+7}$ (k 是自然数);

(2) $1+i+i^2+i^3+\cdots+i^{55}$.

2. 设 $z_1=a_1+b_1i$、$z_2=a_2+b_2i$ 是两个复数, 在什么条件下有:

(1) z_1+z_2 是实数？是纯虚数？

(2) z_1-z_2 是实数？是纯虚数？

(3) $z_1\cdot z_2$ 是实数？是纯虚数？

(4) $\dfrac{z_1}{z_2}$ 是实数？是纯虚数？（这里 $z_2\neq0$.）

(5) z_1^2 是实数？是纯虚数？

3. 已知下列这些命题都是成立的，写出它们的逆命题. 这些逆命题是否仍成立？

(1) 模数、辐角分别相等的两个复数一定相等；

(2) 共轭复数的模数相等.

[提示：要否定一个命题成立，只需举一个例子来说明就可以了. 例如，命题“两个偶数的和是偶数”的逆命题是“两个加数的和是偶数，则这两个加数都是偶数”，只要举出 $1+3=4$ 一例，因 4 是偶数，但 1 和 3 都不是偶数，就足以说明这个逆命题不成立.]

4. (1) 已知 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，求证它的共轭复数 $\bar{z}$ 可以写成 $r(\cos\theta-i\sin\theta)$ 的形式.

(2) 如果复数 z 的辐角的主值是 $\alpha(0\leqslant\alpha<2\pi)$，怎样用 α 的代数式来表示复数 $\bar{z}$ 的辐角？表示 $\bar{z}$ 的辐角的主值？

5. 求适合下列各式的实数 x 和 y:

(1) $(1+2i)x+(3-10i)y=5-6i$;

(2) $x^2+xi+2-3i=y^2+yi+9-2i$;

(3) $2x^2-5x+2+(y^2+y-2)i=0$;

(4) $\dfrac{x}{1-i}+\dfrac{y}{1-2i}=\dfrac{5}{1-3i}$.

6. 化简:

(1) $$(1-\sqrt{3}i)^6[\cos(\varphi-3\theta)+i\sin(\varphi-3\theta)]\times\frac{(\cos2\theta+i\sin2\theta)^3(\cos2\varphi-i\sin2\varphi)}{\cos(\theta-\varphi)+i\sin(\theta-\varphi)};$$

(2) $$\frac{(\sqrt{3}+i)^3\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)}{\left(\cos\dfrac{\pi}{12}-i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)^3}.$$

7．计算:

(1) $(-1+\sqrt{3}i)^6-(-1-\sqrt{3}i)^6$;

(2) $\dfrac{(-1+\sqrt{2}i)^4(-1-\sqrt{2}i)^4}{(\sqrt{2}+i)^4(\sqrt{2}-i)^4}$.

8．计算:

(1) $(x-1-\sqrt{2}i)(x-1+\sqrt{2}i)(x+1-\sqrt{2}i)(x+1+\sqrt{2}i)$;

(2) $(x-\sqrt{2}+i)(x+\sqrt{2}+i)(x+\sqrt{2}-i)(x-\sqrt{2}-i)$.

9．已知m是一个不等于零的实数，且$|m|<1$．求证

$$\frac{\sqrt{1+m}+\sqrt{1-m}i}{\sqrt{1+m}-\sqrt{1-m}i}-\frac{\sqrt{1-m}+\sqrt{1+m}i}{\sqrt{1-m}-\sqrt{1+m}i}$$

的值是一个实数.

10．设 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，求证:

(1) $(1-\omega+\omega^2)(1+\omega-\omega^2)=4$;

(2) $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^8)=9$;

(3) $a^3+b^3=(a+b)(a\omega+b\omega^2)(a\omega^2+b\omega)$;

(4) $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)$.

[提示：可以利用ω的性质(见习题 4·8(1)第 4 题):

$$\omega^3=1,\quad 1+\omega+\omega^2=0.]$$

11．利用 $\sqrt{x^2-y^2\pm 2xy}=\pm(x+yi)^2$，计算:

(1) $\sqrt{-3+4i}$;　　(2) $\sqrt{7+\sqrt{15}i}$;

(3) $\sqrt{5-\sqrt{11}i}$;　　(4) $\sqrt{-7-\sqrt{15}i}$.

12．设 $f(z)=\dfrac{z^2-z+1}{z^2+z+1}$，求:

(1) $f(2+3i)$,　　(2) $f(2-3i)$

的值.

[提示：$f(z)$表示复数z的函数．在右边这个分式中，令$z=2+3i$，化简后即得$f(2+3i)$的值.]

*13．求作关于z的二次方程，使它的两根是:

(1) $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 和 $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$;　(2) $\dfrac{2-i}{1+i}$ 和 $\dfrac{2+i}{1-i}$.

*14．设z_1、z_2是不等于零的复数，用几何方法证明

$$|z_1|+|z_2|\geqslant|z_1+z_2|\geqslant|z_1|-|z_2|;$$

并回答下列问题:

(1) 这个二重不等式的两个等号能否同时成立?

(2) $|z_1|+|z_2|\geqslant|z_1+z_2|$中,什么情况下等号成立?

(3) $|z_1+z_2|\geqslant|z_1|-|z_2|$中,什么情况下等号成立?

*15. 求证 $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2$,并作出几何解释.

16. 已知甲数的平方等于乙数,且乙数的平方等于甲数,求这两个数.

17. 设 z 的共轭虚数是 $\bar{z}$,解下列方程:

(1) $z+|\bar{z}|=2+i$;　　(2) $z^2=\bar{z}$.

[提示: 设 $z=x+yi$ $(y\neq 0)$, 则 $\bar{z}=x-yi$.]

第五章　方程论初步

在本丛书"代数"第二册，曾在实数范围里探讨了一元一次、二次方程，以及某些可化为一元一次、二次方程的高次方程的解法．本章将在学过复数的基础上，研究关于一元方程的一些初步理论和某些特殊形式的一元高次方程的解法．

研究一元方程的理论和解法，需要用到一元多项式的一些重要性质，所以，本章将从复数范围内的一元多项式的一些重要性质谈起．

§5·1　多项式 $f(x)$ 的一些重要性质

形如

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

的代数式，称为 x 的**多项式**．式中 a_0，a_1，a_2，$\cdots$，a_{n-1}，a_n 都是复数，n 是自然数．

如果 $a_0\neq0$，这多项式便称为 x 的 **n 次多项式**．为了说法上的方便，通常把不等于 0 的常数称为 x 的 **0 次多项式**；把常数 0 称为**零多项式**．零多项式没有次数．本章凡提到的 n 次多项式，都指只含有一个变量的正整数次的多项式．

很明显，多项式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

可以看作是 x 的一个函数．为了方便起见，今后将用函数符号 $f(x)$ 来表示 x 的多项式，并且用 $f(a)$ 来表示 $x=a$ 时多项

式 $f(x)$ 的值.

下面将研究 n 次多项式 $f(x)$ 的一些重要性质.

1. 多项式 $f(x)$ 被 $x-a$ 除，所得的余数 我们先来看下面的问题:

问题 已知 $f(x)=2x^2-5x+1$,

(1) 求 $f(2)$;

(2) 求 $f(x)$ 除以 $x-2$ 所得的余数.

很明显，问题中的(1)，只需把 2 代替 $f(x)$ 中的 x，进行计算，得

$$f(2)=2\cdot 2^2-5\cdot 2+1=-1.$$

问题中的(2)，只需直接做除法，从

$$\begin{array}{r|l} 2x^2-5x+1 & x-2 \\ \cline{2-2} 2x^2-4x & 2x-1 \\ \cline{1-1} -x+1 & \\ -x+2 & \\ \cline{1-1} -1 & \end{array}$$

得余数是 -1.

这里，可以看到，$f(x)$ 除以 $x-2$，所得的余数恰巧是 $f(2)$. 现在来研究: 一般的多项式 $f(x)$ 除以 $x-a$，所得的余数是不是总有这样的性质.

我们知道，在除法里，被除式、除式、商式和余式之间，存在着这样的关系:

$$被除式=除式\times商式+余式,$$

其中商式的次数应该等于被除式的次数减去除式的次数，余式的次数至少比除式的次数小 1.

由此，可以得出: 任何一个 n 次多项式 $f(x)$，总可以表示成以下的形式:

$$f(x)=(x-a)f_1(x)+r, \tag{1}$$

这里 $f_1(x)$ 是 $n-1$ 次多项式，r 是一个常数.

等式(1)是一个恒等式，不论 x 取什么值它总能成立．特别是，当 $x=a$ 时应该也成立，所以

$$f(a)=(a-a)f_1(a)+r. \tag{2}$$

对于等式 (2) 的右边第一项的值，不论 $f_1(a)$ 的值是什么，它总等于0，由此可知

$$f(a)=r. \tag{3}$$

把(3)代入(1)，就得到恒等式

$$f(x)=(x-a)f_1(x)+f(a). \tag{4}$$

从(4)，当 $x\neq a$ 时，可以得出：

$$\frac{f(x)}{x-a}=f_1(x)+\frac{f(a)}{x-a}. \tag{5}$$

这就告诉我们：

定理1（余数定理）．n 次多项式 $f(x)$ 除以 $x-a$，所得的余数等于 $f(a)$.

应用余数定理，就可以不做除法而直接求出多项式 $f(x)$ 除以 $x-a$ 所得的余数．这样，有时可使计算比较方便.

例1．已知 $f(x)=8x^3-9$，求：

(1) $f(x)$ 除以 $x-\dfrac{1}{2}$ 的余数；

(2) $f(x)$ 除以 $x+\dfrac{1}{2}$ 的余数.

【解】 根据余数定理，$f(x)$ 除以 $x-a$ 的余数 r 等于 $f(a)$.

(1) 这里 $a=\dfrac{1}{2}$，

$$\therefore\quad r=f\left(\frac{1}{2}\right)=8\left(\frac{1}{2}\right)^3-9=1-9=-8;$$

(2) 这里 $a=-\frac{1}{2}$,

$$\therefore\quad r=f\left(-\frac{1}{2}\right)=8\left(-\frac{1}{2}\right)^3-9=-1-9=-10.$$

例 2. k 是什么数的时候，多项式

$$f(x)=x^3+kx^2-20x-4$$

除以 $x+2$ 的余数是 0.

【解】 根据余数定理，$f(x)$除以 $x+2$ 的余数是:

$$\begin{aligned}f(-2)&=(-2)^3+k(-2)^2-20(-2)-4\\&=4k+28.\end{aligned}$$

今余数为 0, 所以

$$4k+28=0,$$

$$\therefore\quad k=-7.$$

习 题 5·1(1)

1. 不做除法，求下列各题中的余数:

(1) $(3x^3-7x^2+4x+40)\div(x-2)$;

(2) $(x^4-2x^3+x+15)\div(x-3)$;

(3) $(3x^3+5x^2-5x+1)\div(x+1)$;

(4) $(x^3-x+2)\div\left(x+\frac{1}{2}\right)$.

2. 根据下列条件，求多项式 $f(x)$中字母系数 k 的值:

(1) $f(x)=x^3-5x^2+13x+k$ 除以 $x-2$, 所得的余数是 3;

(2) $f(x)=2x^3+3x^2+kx-1$ 除以 $x+3$, 所得的余数是 -4.

3. $f(x)=6x^3-19x^2+ax+b$ 除以 $x+1$, 所得的余数是 -24; 除以 $x-3$, 所得的余数是 8. 求 a、b 的值.

[提示: 从 $f(-1)=-24$、$f(3)=8$ 写出两个关于 a、b 的方程组，再解这个方程组即得.]

2. 多项式 $f(x)$ 能被 $x-a$ 所整除的条件　余数定理

的一个重要应用，是用来直接判断：多项式 $f(x)$ 能不能被 $x-a$ 所整除.

事实上，从恒等式

$$f(x)=(x-a)f_1(x)+r$$

直接可以看出：

只须 $f(a)=0$，$f(x)$ 就能够被 $x-a$ 所整除；

要使 $f(x)$ 能被 $x-a$ 整除，必须 $f(a)=0$.

把这两句话合起来说，也就是：

余数定理的推论 要使多项式 $f(x)$ 能被 $x-a$ 整除，只须并且必须 $f(a)=0$.

注 对于某一结论 B 来说，如果具备了条件 A 后，这个结论就能成立，这时说：条件 A 是结论 B 成立的**充分条件**；如果不具备条件 A，这个结论就不成立(或者说，要使这个结论成立，必须具有条件 A)，这时说：条件 A 是结论 B 成立的**必要条件**. 条件 A 既是结论 B 成立的充分条件，又是结论 B 成立的必要条件，那末称条件 A 是结论 B 成立的**充分必要条件**，简称**充要条件**. 应用这种说法，上面的推论就可以说成：

多项式 $f(x)$ 能被 $x-a$ 整除的充要条件是 $f(a)=0$.

因为，当 $f(a)=0$ 时，$f(x)=(x-a)Q(x)$，这正表示着 $x-a$ 是 $f(x)$ 的一个因式，因此上面的推论通常也叙述成：

因式定理 多项式 $f(x)$ 含有因式 $x-a$ 的充要条件是

$$f(a)=0.$$

例 3. 已知多项式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n \quad (a_0\neq 0,\ n\geqslant 2)$$

在 $x=a$ 或者 $x=b\ (a\neq b)$ 时的值都是零，求证 $f(x)$ 有因式

$$(x-a)(x-b).$$

分析 要证明 $f(x)$ 含有因式 $(x-a)(x-b)$，只需证明 $f(x)$ 能表示成 $(x-a)$、$(x-b)$ 与另一个多项式的积的形式. 根据因式定理，从 $f(a)=0$ 可知，$f(x)$ 可以表示成 $(x-a)$ 与多项式 $f_1(x)$ 的积的形式，即

$$f(x)=(x-a)f_1(x).$$

因此只要运用另一条件$f(b)=0$，且$a\neq b$，证明$f_1(x)$可以表示成$x-b$与另一多项式$f_2(x)$的积的形式。

【证】 $\because\quad f(a)=0,$

$$\therefore\quad f(x)=(x-a)f_1(x), \tag{1}$$

式中$f_1(x)$是$n-1$次$(n\geqslant 2)$多项式。

用b代替(1)式中的x，得

$$f(b)=(b-a)f_1(b), \tag{2}$$

$\because\quad f(b)=0$，而$a\neq b$，从式(2)可得

$$f_1(b)=0. \tag{3}$$

由此，根据因式定理，

$$f_1(x)=(x-b)f_2(x). \tag{4}$$

从式(1)和式(4)，得

$$f(x)=(x-a)(x-b)f_2(x).$$

这就证实了$f(x)$有因式$(x-a)(x-b)$。

习　题　5·1(2)

1. 证明:

(1) x^3+3x^2-x-6能被$x+2$整除;

(2) x^n-a^n能被$x-a$整除;

(3) 当n为奇数时，x^n+a^n能被$x+a$整除;

(4) 当n为偶数时，x^n-a^n能被$x+a$整除.

[解法举例: 第(2)题设$f(x)=x^n-a^n$. 今$f(a)=a^n-a^n=0$，所以x^n-a^n能被$x-a$整除.]

2. 证明$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$能被$a-b$、$b-c$、$c-a$整除.

3. 设$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n\ (n\geqslant 3)$，且$f(\alpha_1)=0$，$f(\alpha_2)=0$，$f(\alpha_3)=0$(这里$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$互不相等). 求证$f(x)$含有因式

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3).$$

[提示: 运用例3已证得的结果.]

4. 已知$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$，求证：

(1) 在$a_0+a_1+\cdots+a_n=0$时，$f(x)$能被$x-1$整除；

(2) 在$a_0-a_1+\cdots+(-1)^na_n=0$时，$f(x)$能被$x+1$整除.

［提示：对于(2)，把n分成偶数和奇数两种情况来证.］

3. 多项式$f(x)$的标准分解式 如果当$x=a$时，$f(x)$的值是0，那末a就称为是多项式$f(x)$的根. 例如，对于二次三项式

$$f(x)=3x^2-2x-1$$

来说，因为$f(1)=0$，$f\left(-\frac{1}{3}\right)=0$，所以1和$-\frac{1}{3}$都是它的根. 由此可知，这个二次三项式可以表示成二个一次因式的积，就是

$$f(x)=3(x-1)\left(x-\frac{1}{3}\right).$$

高等代数里将证明：在复数范围里，任何一个正整数次的多项式，至少有一个根. 这定理称为**代数基本定理**. 从这定理出发，可以推导出下面这个定理：

定理 2. 任何一个n次多项式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n \quad (a_0\neq 0)$$

都可以表示成n个一次因式的积.

分析 这就是要证明：$f(x)$能表示成

$$a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$$

的形式. 为此，仿照例3的办法，首先证明$f(x)$能表示成$(x-\alpha_1)f_1(x)$的形式，$f_1(x)$能表示成$(x-\alpha_2)f_2(x)$的形式，这样依次递推下去.

【证】 根据代数基本定理，多项式$f(x)$至少有一个根. 设这个根是α_1. 那末，根据根的定义，必有$f(\alpha_1)=0$. 由此，从因式定理可知，$f(x)$可以表示成

$$f(x)=(x-\alpha_1)f_1(x) \tag{1}$$

的形式. 这里 $f_1(x)$ 是 x 的 $n-1$ 次多项式，并且含 x^{n-1} 项的系数是 a_0，即

$$f_1(x)=a_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\cdots+b_{n-1}\quad(a_0\neq0).$$

如 $n=1$，$f_1(x)=a_0x^0=a_0$，这时 $f(x)=a_0(x-\alpha_1)$. 定理得证.

如果 $n>1$，根据代数基本定理，$f_1(x)$ 至少有一个根，设这个根是 α_2. 那末根据同样的道理，可以推出

$$f_1(x)=(x-\alpha_2)f_2(x).\tag{2}$$

式中

$$f_2(x)=a_0x^{n-2}+c_1x^{n-3}+\cdots+c_{n-2}\quad(a_0\neq0).$$

由(1)和(2)可知

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)f_2(x).\tag{3}$$

如果 $n=2$，$f_2(x)=a_0$，这时 $f(x)=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$. 定理得证.

如果 $n>2$，仿照上面的方法再推下去，这样到了第 n 步，总可得到

$$f(x)=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)\quad(a_0\neq0).\tag{4}$$

定理得证.

在上面的证明中，所设的 n 个数 α_1，α_2，…，α_n 并不要求各不相同. 如果这 n 个数中有 k_1 个都等于 α_1，k_2 个都等于 α_2，……，k_j 个都等于 α_i，这里 k_1，k_2，…，k_j 都是自然数，且 $k_1+k_2+\cdots+k_j=n$，那末这个多项式就可以表示成

$$f(x)=a_0(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdots(x-\alpha_j)^{k_j}\quad(a_0\neq0).\tag{5}$$

上面这个式子称为多项式 $f(x)$ 的**标准分解式**，其中 $x-\alpha_1$，$x-\alpha_2$，…，$x-\alpha_j$ 分别称为 $f(x)$ 的 k_1 重，k_2 重，…，k_j 重因式.

例如，$f(x)=(x+2)(x^2+2x+1)(x^3-3x^2+3x-1)$ 的标

准分解式是

$$f(x)=(x+2)(x+1)^2(x-1)^3,$$

这个多项式含有一重因式（简称因式）$x+2$，二重因式 $x+1$ 和三重因式 $x-1$.

从 $f(x)$ 的标准分解式可以看出：

推论 $f(x)$ 有 k 重因式 $x-\alpha$ 的充分必要条件是：$f(x)$ 能被 $(x-\alpha)^k$ 整除，但不能被 $(x-\alpha)^{k+1}$ 整除.

例 4. 已知 $f(x)=x^4-x^3-x+1$ 有二重因式 $x-1$，把 $f(x)$ 写成标准分解式.

【解】 $f(x)$ 能被 $(x-1)^2=x^2-2x+1$ 整除，做除法：

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -x^3 & & -x & +1 & x^2-2x+1 \\ \cline{6-6}
x^4 & -2x^3 & +x^2 & & & x^2+x+1 \\ \cline{1-5}
 & x^3 & -x^2 & -x & & \\
 & x^3 & -2x^2 & +x & & \\ \cline{2-5}
 & & x^2 & -2x & +1 & \\
 & & x^2 & -2x & +1 & \\ \cline{3-5}
 & & & & 0 &
\end{array}$$

得商是 x^2+x+1.

$$\begin{aligned}\therefore\quad f(x)&=(x-1)^2(x^2+x+1)\\&=(x-1)^2\left(x-\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right).\end{aligned}$$

从 $f(x)$ 的标准分解式，容易看出，当 $x=\alpha_j$ 时，$f(\alpha_j)=0$，所以 α_j 是多项式 $f(x)$ 的根；当 $x=\beta\neq\alpha_j$ 时，

$$f(\beta)=a_0(\beta-\alpha_1)^{k_1}(\beta-\alpha_2)^{k_2}\cdots(\beta-\alpha_j)^{k_j}\neq 0,$$

所以 β 不能是多项式 $f(x)$ 的根. 这就是说：

多项式 $f(x)$ 的每一个一次因式的根，都是 $f(x)$ 的根. 除此之外，多项式 $f(x)$ 不能有其他的根.

通常，把多项式 $f(x)$ 的 k 重因式 $x-\alpha$ 的根，称为 $f(x)$ 的 $\boldsymbol{k}$ 重根，当 $k=1$ 时，这个根就称为**单根**．在计算多项式 $f(x)$ 根的个数时，k 重根算作是 k 个根．这样，从

$$f(x)=a_0(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdots(x-\alpha_j)^{k_j}\quad(a_0\neq 0)$$

和 $k_1+k_2+\cdots+k_j=n$ 以及上面的结论，就容易推出：

定理 3（多项式的根的个数定理）．n 次多项式 $f(x)$ 有，并且只有 n 个根．

例 5．已知 -1 是

$$f(x)=x^5+3x^4+4x^3+4x^2+3x+1$$

的一个三重根，求这个多项式所有的根．

分析　因为 -1 是多项式 $f(x)$ 的三重根，所以 $f(x)$ 应能被 $(x+1)^3$ 整除．直接做除法，可以求出 $f(x)$ 的另一个二次因式，从而找到其他两个根．由此得下面的解法．

【解】

$$\begin{array}{r|l}
x^5+3x^4+4x^3+4x^2+3x+1 & x^3+3x^2+3x+1 \\ \cline{2-2}
x^5+3x^4+3x^3+\ \ x^2 \qquad\qquad & x^2+1 \\ \cline{1-1}
x^3+3x^2+3x+1 & \\
x^3+3x^2+3x+1 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

于是

$$\begin{aligned} f(x)&=(x+1)^3(x^2+1)\\ &=(x+1)^3(x+i)(x-i). \end{aligned}$$

$\therefore$　$f(x)$ 的五个根是 $1,\ 1,\ 1,\ i,\ -i$．

例 6．求作一个三次多项式 $f(x)$，使它满足下面三个条件：

(1) 它的三个根是 $1,\ \dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2}$；

(2) 各项的系数都是整数，其最大公约数是 1；

(3) 最高次项的系数是正数．

【解】 满足条件(1)的多项式，可以一般地表示成：

$$f(x)=a_0(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$=a_0(x-1)\left(x^2-\frac{1}{4}\right)=a_0\left(x^3-x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\right).$$

要使这多项式各项的系数满足上面的条件(2)和(3)，a_0 必须是 4.

所以，所求的多项式是

$$f(x)=4x^3-4x^2-x+1.$$

注 1. 满足条件(2)的多项式，通常简称最简整系数多项式.

2. 本题中如无条件(3)，那末有两解，另一个解是

$$f(x)=-4x^3+4x^2+x-1.$$

习 题 5·1(3)

1. 把下列各多项式分解成一次因式的积：

(1) x^3-1； (2) x^3+1；

(3) x^4+4； (4) x^4+x^2+1.

2. 求作一个最高次项系数是正数的最简整系数四次多项式 $f(x)$，使它的四个根是：

(1) 1, -2, -3, 4； (2) $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$.

3. 求作一个次数最低的多项式 $f(x)$，使它的最高次项系数是 1，并且具有根：

(1) $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{3}$； (2) 1, -1 和 $1+i$.

4. 多项式恒等于零的条件 在多项式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

里，如果 $a_0=a_1=\cdots=a_{n-1}=a_n=0$，$f(x)$ 就表示一个零多项式. 这时，不论 x 取什么值，$f(x)$ 恒等于零. 这就是说：多项式 $f(x)$ 恒等于零的充分条件是

$$a_0=a_1=\cdots=a_{n-1}=a_n=0.$$

可以证明,这个条件也是使多项式$f(x)$恒等于零的必要条件.

【证】 用反证法. 如果$a_0\neq0$. 这时,$f(x)$是n次多项式. 根据定理3,$f(x)$只能有n个根. 这就是说,最多只能有n个数$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$,能使$f(x)=0$. 这与$f(x)$恒等于零这一已知事实矛盾. 所以,$a_0\neq0$是不可能的. 因此$a_0=0$. 同样可以证明

$$a_1=0, \quad \cdots, \quad a_{n-1}=0, \quad a_n=0.$$

由此可知,要使$f(x)$恒等于零,必须

$$a_0=a_1=\cdots=a_{n-1}=a_n=0.$$

综上面所述,就可以得出:

定理4. 多项式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

恒等于零的充要条件是

$$a_0=a_1=\cdots=a_{n-1}=a_n=0.$$

由此,还可以得出:

推论 两个多项式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,$$
$$\varphi(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n$$

恒等的充要条件是

$$a_0=b_0, \quad a_1=b_1, \quad \cdots, \quad a_{n-1}=b_{n-1}, \quad a_n=b_n.$$

【证】 $f(x)$与$\varphi(x)$恒等的充要条件是$f(x)-\varphi(x)$恒等于零,就是

$$(a_0-b_0)x^n+(a_1-b_1)x^{n-1}+\cdots+(a_{n-1}-b_{n-1})x+(a_n-b_n)$$

恒等于零. 因此,根据定理4, 必须并且只须

$$a_0-b_0=a_1-b_1=\cdots=a_{n-1}-b_{n-1}=a_n-b_n=0,$$

就是 $a_0=b_0,\quad a_1=b_1,\quad \cdots,\quad a_{n-1}=b_{n-1},\quad a_n=b_n.$

例 7. 已知二次三项式 x^2+px+q 的两个根是 5 和 -3，求 p、q 的值.

【解】 根据题中条件，可得恒等式

$$x^2+px+q=(x-5)(x+3).$$

就是

$$x^2+px+q=x^2-2x-15.$$

比较两边的系数，得

$$p=-2,\ q=-15.$$

注意 想一想：除上述解法外，本题还可以有哪些另外的解法？

例 8. 已知多项式 $f(x)=4x^4-4x^3+13x^2-6x+9$,

(1) 求证：$f(x)$ 能表示成 x 的二次三项式的平方；

(2) 求这个二次三项式.

分析 只要找到一个二次三项式 ax^2+bx+c，它的平方恰巧等于 $f(x)$，那末问题就完全解决了. 所以，这就是要从

$$4x^4-4x^3+13x^2-6x+9=(ax^2+bx+c)^2$$

这一恒等式(假定能够成立)中确定 a、b、c 的值. 容易看出，a 只能是 ±2. 为了方便起见，不妨假设题中的二次三项式是 $\pm(2x^2+bx+c)$. 应用两个多项式恒等的定理，即可求得其解.

【解】 设 $f(x)$ 能表示成一个二次三项式的平方. 那末

$$4x^4-4x^3+13x^2-6x+9=[\pm(2x^2+bx+c)]^2 \qquad (1)$$

是一个恒等式. 从式(1)即有

$$\begin{aligned}&4x^4-4x^3+13x^2-6x+9\\&\quad=4x^4+4bx^3+(b^2+4c)x^2+2bcx+c^2,\end{aligned} \qquad (2)$$

比较两边同次项的系数，得方程组

$$(\mathrm{I})\quad\begin{cases}4b=-4, & (3)\\ b^2+4c=13, & (4)\\ 2bc=-6, & (5)\\ c^2=9. & (6)\end{cases}$$

解式(3)和式(4)组成的方程组，得$\begin{cases}b=-1\\c=3\end{cases}$．代入式(5)和式(6)都适合，所以它是方程组(I)的解．

由此可知，

$$4x^4-4x^3+13x^2-6x+9=[\pm(2x^2-x+3)]^2$$

是恒等式．所以，

(1) $f(x)$能表示成x的二次三项式的平方；

(2) 这个二次三项式是

$$2x^2-x+3 \quad \text{或} \quad -2x^2+x-3.$$

说明　1．本题解法中，先假设这个二次三项式是$\pm(2x^2+bx+c)$，然后再根据已知条件来确定b、c的值，这样的解法称为**待定系数法**，b、c称为待定系数．在应用待定系数法解题时，常常要用到两个多项式恒等的条件．

2．本题解的过程中，待定系数只有b和c两个，但是根据两个多项式恒等的条件列出的方程组却有4个方程．对于含有两个未知数的四个方程所组成的方程组，从其中两个方程中求出b和c的值以后，还必须代入其他两个方程中进行检验，如果不适合，那末它不是原方程组的解；如果原方程组无解，那末原先假设的恒等式就不能成立．例如，本题中在解方程组(I)时，如从(3)和(6)来解便有$\begin{cases}b=-1\\c=3\end{cases}$和$\begin{cases}b=-1\\c=-3\end{cases}$，显然后一解是不适合其余两式的．又如，本题如改成

$$f(x)=4x^4-4x^3+13x^2+6x+9,$$

那末，从

$$4x^4-4x^3+13x^2+6x+9=[\pm(2x^2+bx+c)]^2 \tag{1'}$$

可得出方程组

$$(\mathrm{I}')\quad\begin{cases}4b=-4, & (3')\\ b^2+4c=13, & (4')\\ 2bc=6, & (5')\\ c^2=9. & (6')\end{cases}$$

由(3')和(4')可解出$b=-1$，$c=3$．但是，代入(5')不适合，方程组(I')无解．这就是说，不能找到b，c的值，使(1')为恒等式．由此可知$f(x)$

不能表示成二次三项式，原来的题目是无解的，即

$$4x^4-4x^3+13x^2+6x+9$$

不可能表成 x 的二次三项式的平方.

习　题　5·1(4)

1. 已知

$$x^3+px^2+qx+r=(x-1)(x+2)(x-3)$$

是一个恒等式，求 p, q, r 的值.

2. 已知 x^3+8x^2+5x+a 能被 x^2+3x+b 整除，求 a、b 的值，并求除得的商.

3. 用待定系数法求下列各式的平方根：

(1) $9x^4-12x^3-14x^2+12x+9$;

(2) $4x^4-12x^3+29x^2-30x+25$.

4. 设 $f(x)=x^6+6x^5+3x^4-28x^3-9x^2+54x-27$,

(1) 证明 $f(x)$ 能变形成 $(x^2+px+q)^3$，其中 p, q 都是实数；

(2) 分解 $f(x)$ 的因式.

§5·2　综合除法

在研究方程的理论和解法时，常常要计算多项式 $f(x)$ 除以 $x-\alpha$ 所得的商和余数. 用普通的除法，计算比较麻烦. 如果利用 §5·1 里的两个多项式恒等的定理，将有一种比较简便的方法.

设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ $(a_0\neq 0)$ 除以 $x-\alpha$，所得的商是 $\varphi(x)$，余数是 r. 那末，从除法的意义，可以得出一个恒等式

$$f(x)=(x-\alpha)\varphi(x)+r. \tag{1}$$

这里 $\varphi(x)$ 是 x 的 $n-1$ 次多项式，把它记作

$$\varphi(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+b_2x^{n-3}+\cdots+b_{n-2}x+b_{n-1}.$$

这样，从式(1)可得

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$
$$=(x-\alpha)(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+b_2x^{n-3}+\cdots+b_{n-2}x+b_{n-1})+r,$$

就是
$$\begin{aligned}a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\\=b_0x^n+(b_1-\alpha b_0)x^{n-1}+(b_2-\alpha b_1)x^{n-2}+\cdots\\+(b_{n-1}-\alpha b_{n-2})x+(r-\alpha b_{n-1}).\end{aligned}\qquad(2)$$

等式(2)是一个恒等式．根据§5·1定理4的推论可知，式(2)的等号两边同次项的系数应该相等．由此可得：

$$\begin{aligned}
&a_0=b_0, &&\therefore\quad b_0=a_0;\\
&a_1=b_1-\alpha b_0, &&\therefore\quad b_1=a_1+\alpha b_0;\\
&a_2=b_2-\alpha b_1, &&\therefore\quad b_2=a_2+\alpha b_1;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots &&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_{n-1}=b_{n-1}-\alpha b_{n-2}, &&\therefore\quad b_{n-1}=a_{n-1}+\alpha b_{n-2};\\
&a_n=r-\alpha b_{n-1}, &&\therefore\quad r=a_n+\alpha b_{n-1}.
\end{aligned}$$

从上面右边得出的一列等式可以看到，商 $\varphi(x)$ 的各项系数 $b_0, b_1, b_2, \cdots, b_{n-1}$ 和余数 r，可以从被除式 $f(x)$ 的各项系数 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n$ 和除式 $x-\alpha$ 中的 α 顺次递推出来，方法是：

(1) 把 a_0 就作为 b_0；

(2) 把 b_0 与 α 的积 αb_0 加在 a_1 上，即得 b_1；

(3) 把 b_1 与 α 的积 αb_1 加在 a_2 上，即得 b_2；

…………………………………………

(n) 最后，把 b_{n-1} 与 α 的积 αb_{n-1} 加在 a_n 上，即得 r.

为了方便，上面的计算可以列式来进行：

$$\begin{array}{cccccc|c}
a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n & \alpha\\
 & +\alpha b_0 & +\alpha b_1 & \cdots & +\alpha b_{n-2} & +\alpha b_{n-1} & \\
\hline
a_0 & a_1+\alpha b_0 & a_2+\alpha b_1 & & a_{n-1}+\alpha b_{n-2} & a_n+\alpha b_{n-1} & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \downarrow & \\
b_0 & b_1 & b_2 & & b_{n-1}, & r &
\end{array}$$

例如，求 $f(x)=3x^5-14x^3+7$ 除以 $x-2$ 所得的商和余数，先把 $f(x)$ 看成是按 x 降幂排列的完全多项式

$$f(x)=3x^5+0x^4-14x^3+0x^2+0x+7,$$

由此确定各项的系数顺次是 3, 0, -14, 0, 0, 7, 再由 $x-2$ 确定 $\alpha=2$, 这样，就可以按照上面的算式，列式来计算：

$$\begin{array}{cccccc|l}
3 & 0 & -14 & 0 & 0 & +7 & 2 \\
 & +6 & +12 & -4 & -8 & -16 & \\
\hline
3 & +6 & -2 & -4 & -8, & -9 &
\end{array}$$

$\therefore$ 商是 $\varphi(x)=3x^4+6x^3-2x^2-4x-8$,

余数是 $r=-9$.

象上面这样求多项式 $f(x)$ 除以 $x-\alpha$ 的商和余数的方法，称为**综合除法**.

例 1. 求 $f(x)=3x-4x^2+5x^4$ 除以 $x+1$ 的商和余数.

【解】 这里 $f(x)=5x^4+0x^3-4x^2+3x+0$,

$$x+1=x-(-1).$$

$$\begin{array}{ccccc|l}
5 & 0 & -4 & +3 & 0 & -1 \\
 & -5 & +5 & -1 & -2 & \\
\hline
5 & -5 & +1 & +2, & -2 &
\end{array}$$

$\therefore$ 商是 $5x^3-5x^2+x+2$, 余数是 -2.

注 1. 一个完全四次多项式应该有 5 个项，所以第一行排列出的被除式的系数应该有 5 个. 在计算时，用这种方法来检验一下，可以防止把应写出的系数漏掉（例如，本题中最后常数项是 0, 稍一疏忽是很容易被漏掉的）.

2. 一个四次多项式除以一次式，所得的商应该是三次多项式. 在计算时，注意到这一点，商就容易写出.

例 2. 已知 $f(x)=3x^5-4x^4-4x^3+6x^2+x-2$,

求 $f\left(-\frac{2}{3}\right)$.

分析 在本题中，直接用 $-\frac{2}{3}$ 代替 $f(x)$中的 x 来计算比较麻烦. 根据余数定理，$f\left(-\frac{2}{3}\right)$ 就是 $f(x)$除以 $x+\frac{2}{3}$ 所得的余数. 于是可改用综合除法来计算.

【解】

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
3 & -4 & -4 & +6 & +1 & -2 & -\frac{2}{3} \\
 & -2 & +4 & +0 & -4 & +2 & \\
\hline
3 & -6 & +0 & +6 & -3, & 0 &
\end{array}
$$

$$\therefore\quad f\left(-\frac{2}{3}\right)=0.$$

习 题 5·2(1)

1. 用综合除法求商和余数:

(1) $(3x^4-5x^3-4x^2+3x-2)\div(x-2)$;

(2) $(2x^5-12x^4+14x^3-23x^2+17x-33)\div(x-5)$;

(3) $(x^3+6x^2+11x+6)\div(x+3)$;

(4) $(x^4-1)\div(x+1)$.

2. 已知 $f(x)=1-3x+5x^3-2x^5$，应用综合除法求:

(1) $f(5)$; (2) $f(-4)$.

3. 已知 $f(x)=3x^4-x^3+5x^2-8x+4$，求:

(1) $f\left(\frac{1}{3}\right)$; (2) $f\left(-\frac{2}{3}\right)$.

对于多项式 $f(x)$ 除以一般的一次二项式 $ax-b$ 的除法，也可以应用综合除法来做. 为了得出法则，先来解答下面的问题:

问题 求 $f(x)=3x^3-11x^2+18x-3$ 除以

(1) $3x-2$; (2) $x-\frac{2}{3}$

的商和余数，并比较求得的两个商和两个余数之间各有怎样的关系.

对(1)，做普通除法.

$$\begin{array}{r|l} 3x^3-11x^2+18x-3 & 3x-2 \\ \cline{2-2} 3x^3-\ \ 2x^2 & x^2-3x+4 \\ \cline{1-1} -\ 9x^2+18x & \\ -\ 9x^2+\ \ 6x & \\ \cline{1-1} 12x-3 & \\ 12x-8 & \\ \cline{1-1} 5 & \end{array}$$

$\therefore$ 商是 x^2-3x+4，余数是5.

对(2)，运用综合除法.

$$\begin{array}{rrrr|l} 3 & -11 & +18 & -3 & \frac{2}{3} \\ & +2 & -6 & +8 & \\ \hline 3 & -9 & +12, & +5 & \end{array}$$

$\therefore$ 商是 $3x^2-9x+12$，余数是5.

比较(1)和(2)中求得的商和余数，可见 $f(x)$ 除以 $3x-2$ 所得的商，恰巧是 $f(x)$ 除以 $x-\frac{2}{3}$ 的商的 $\frac{1}{3}$；而它们的余数相同.

上面从比较中所得出的结论，可以直接根据除法的意义得出. 事实上，设 $f(x)$ 除以 $x-\frac{2}{3}$ 所得的商是 $Q'(x)$ 而余数是 r'，那末，根据除法的意义，有

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x-\frac{2}{3}\right)Q'(x)+r' \\ &= \frac{1}{3}(3x-2)Q'(x)+r' \\ &= (3x-2)\left[\frac{1}{3}Q'(x)\right]+r'. \end{aligned}$$

由此可知：$f(x)$除以 $3x-2$ 所得的商应是 $\frac{1}{3}Q'(x)$而余数仍是 r'.

由此容易得出，求多项式 $f(x)$ 除以 $ax-b$ 的商 $Q(x)$和余数 r 的法则是：

1° 先用综合除法求出 $f(x)$ 除以 $x-\frac{b}{a}$ 所得的商 $Q'(x)$和余数 r'；

2° 以 a 除 $Q'(x)$即得所求的商 $Q(x)$；

3° 即以 1° 中求得的余数 r' 作为所求的余数 r.

例如，上面问题中的(1)，可以列成如下的算式来解：

$$
\begin{array}{r|rrrr|l}
 & 3 & -11 & +18 & -3 & \frac{2}{3} \\
 & & +2 & -6 & +8 & \\
\hline
3 & 3 & -9 & +12, & +5 & \\
\cline{2-4}
 & 1 & -3 & +4 & &
\end{array}
$$

$\therefore$ 商是 x^2-3x+4，余数是 5.

例 3. 已知 $f(x)=2x^5-3x^4+2x^3-2x^2+1$ 有二重根 1 和单根 $-\frac{1}{2}$，把 $f(x)$分解为一次因式.

分析 根据已知条件，显然$f(x)$ 能被$(x-1)^2(2x+1)$所整除，故可做除法而求得它的另一个二次因式，再分解因式即得.

【解】

$$
\begin{array}{r|rrrrrr|l}
 & 2 & -3 & +2 & -2 & 0 & +1 & 1 \\
 & & +2 & -1 & +1 & -1 & -1 & \\
\cline{2-7}
 & 2 & -1 & +1 & -1 & -1, & 0 & 1 \\
 & & +2 & +1 & +2 & +1 & & \\
\cline{2-7}
 & 2 & +1 & +2 & +1, & 0 & & -\frac{1}{2} \\
 & & -1 & +0 & -1 & & & \\
\cline{2-7}
2 & 2 & 0 & +2, & 0 & & & \\
\cline{2-4}
 & 1 & 0 & +1 & & & &
\end{array}
$$

$$\therefore \quad f(x)=(x-1)^2(2x+1)(x^2+1)$$
$$=(x-1)^2(2x+1)(x+i)(x-i).$$

习　题　5·2(2)

1. 应用综合除法，求商和余数:

(1) $(2x^3-3x^2+8x-12)\div(2x-3)$;

(2) $(2x^4+3x^3+3x^2+5x-1)\div(2x+1)$.

2. 已知 $f(x)=6x^4-x^3-6x^2-x-12$,

(1) 求证 $f(x)$ 能被 $2x-3$ 整除，也能被 $3x+4$ 整除;

(2) 把 $f(x)$ 分解成一次因式.

3. 已知$f(x)=2x^3+7x^2+k$ 有因式 $2x+3$，决定 k 的值，并且把 $f(x)$分解成一次因式.

§5·3　一元 n 次方程

把 n 次多项式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$

用等号与 0 联结起来，就得到方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0, \tag{1}$$

式中 n 是自然数，a_0, a_1, a_2, $\cdots$, a_n 是任何复数，$a_0\neq0$. 这样的方程称为关于 x 的**一元 n 次方程**. 如果 $n>2$，通常也称之为**高次方程**.

现在，利用 § 5·1 里讲过的关于多项式的性质，来研究一般的一元 n 次方程的重要性质. 为了方便起见，将方程(1)简单地记作

$$f(x)=0.$$

1. 一元 n 次方程的根　根据方程的根的意义，我们知道：如果 $f(a)=0$，那末 a 是方程 $f(x)=0$ 的根；反过来，如

果 a 是方程 $f(x)=0$ 的根，那末 $f(a)=0$. 这就是说，方程 $f(x)=0$ 的根与多项式 $f(x)$ 的根是完全一样的. 由此，从多项式 $f(x)$ 的根的性质，可以直接得出：

多项式 $f(x)$ 的每一个一次因式的根，都是方程 $f(x)=0$ 的根，除此之外，方程 $f(x)=0$ 不再有其他的根.

多项式 $f(x)$ 的 k 重因式 $x-\alpha$ 的根，称为方程 $f(x)=0$ 的 **k 重根**. 由此，进一步可以得出：

方程 $f(x)=0$ 有 k 重根 α 的充要条件是多项式 $f(x)$ 能被 $(x-\alpha)^k$ 整除但不能被 $(x-\alpha)^{k+1}$ 整除；

n 次方程 $f(x)=0$ 有且只有 n 个根（k 重根算作是 k 个根）.

例 1. 已知方程

$$x^5-ax^2-ax+1=0$$

有二重根 -1，求系数 a 的值.

分析 既然 -1 是方程的二重根，那末多项式 $f(x)=x^5-ax^2-ax+1$ 必能被 $(x+1)^2$ 整除，但不能被 $(x+1)^3$ 整除. 因此，$f(x)$ 除以 $x+1$ 所得的余数 r_1 要等于 0，$\dfrac{f(x)}{x+1}$ 再除以 $x+1$ 所得的余数 r_2 也要等于 0，但 $\dfrac{f(x)}{(x+1)^2}$ 再除以 $x+1$ 所得的余数 r_3 不能等于 0. 根据以上要求，求出 r_1, r_2, r_3，就可决定 a 应取的值.

【解】

$$\begin{array}{cccccc|ll}
1 & +0 & +0 & -a & -a & +1 & -1 & \\
 & -1 & +1 & -1 & +(a+1) & -1 & & \\
\hline
1 & -1 & +1 & -(a+1) & +1, & 0 & & \therefore\ r_1=0, \\
 & -1 & +2 & -3 & +(a+4) & & & \\
\hline
1 & -2 & +3 & -(a+4), & +(a+5) & & & \therefore\ r_2=a+5, \\
 & -1 & +3 & -6 & & & & \\
\hline
1 & -3 & +6, & -(a+10) & & & & \therefore\ r_3=-(a+10).
\end{array}$$

令

$$\begin{cases} r_2 = a+5=0, & (1) \\ r_3 = -(a+10) \neq 0. & (2) \end{cases}$$

从(1)得 $a=-5$，代入(2)适合.

由此可知，要使原方程有二重根 -1，必须并且只须 $a=-5$.

习　题　5·3(1)

1．求证:

(1) 各项系数都是正数的一元 n 次方程没有正根;

(2) 偶次项的系数是正数，奇次项的系数是负数的一元 n 次方程没有负根.

[解法举例: (1) 设这个一元 n 次方程是

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0,$$

式中 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n$ 都是正数.

再设 α 为任一正数，根据正数的积必为正数，正数的和必为正数，可知:

$$f(\alpha)=a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\alpha+a_n>0.$$

所以 α 不可能是方程 $f(x)=0$ 的根. 这就是说，方程 $f(x)=0$ 没有正根.]

2．已知方程

$$f(x)=x^3+8x^2+5x-50=0,$$

(1) 求证 -5 是这个方程的二重根;

(2) 求这个方程的另一个根.

3．已知方程

$$f(x)=x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8=0,$$

(1) 求证 2 是这个方程的三重根;

(2) 求这个方程的另外两个根.

4．已知方程

$$f(x)=2x^4-11x^3+18x^2-ax-2a=0$$

有三重根 2,

(1) 求 a 的值;

(2) 解这个方程.

2. 一元 n 次方程根与系数间的关系 对于一元二次方程,我们已经知道,存在如下的性质:如果一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0$$

的两个根是 x_1 和 x_2, 那末

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

现在把方程的这一性质推广到一般的一元 n 次方程.

定理 如果方程

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0 \quad (a_0\neq 0)$$

的 n 个根是 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n$, 那末

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}+x_n=-\dfrac{a_1}{a_0}, \\ x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n=\dfrac{a_2}{a_0}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n=(-1)^n\dfrac{a_n}{a_0}. \end{cases}$$

【证】 因为 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n$ 是方程 $f(x)=0$ 的根,所以多项式 $f(x)$ 必定含有 n 个一次因式:

$$x-x_1,\ x-x_2,\ \cdots,\ x-x_{n-1},\ x-x_n.$$

于是

$$\begin{aligned} &a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n \\ &\quad=a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})(x-x_n). \end{aligned}$$

把上式的右边按照 x 的幂展开,得

$$
\begin{aligned}
&a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\\
&\quad=a_0x^n-a_0(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}+x_n)x^{n-1}\\
&\qquad+a_0(x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n)x^{n-2}-\cdots\\
&\qquad+(-1)^n a_0x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n.
\end{aligned}
$$

这是一个恒等式，根据 §5·1 定理 4 的推论，可得

$$
\begin{cases}
a_1=-a_0(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}+x_n),\\
a_2=a_0(x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_n=(-1)^n x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n.
\end{cases}
$$

$$
\therefore\quad
\begin{cases}
x_1+x_2+\cdots+x_n=-\dfrac{a_1}{a_0},\\
x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n=\dfrac{a_2}{a_0},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n=(-1)^n\dfrac{a_n}{a_0}.
\end{cases}
$$

例 2. 已知方程 $2x^3+5x^2-4x-12=0$ 有重根，解这个方程.

分析 既然这个方程有重根，它至少要有两个根相同. 因此，可设这个方程的三个根是 α, α, β，利用根与系数的关系，即可确定 α 和 β 的值.

【解】 设这个方程的根是 α, α, β, 那末

$$
\begin{cases}
\alpha+\alpha+\beta=-\dfrac{5}{2}, & (1)\\
\alpha^2+\alpha\beta+\alpha\beta=-2, & (2)\\
\alpha^2\beta=6. & (3)
\end{cases}
$$

从(1)，得

$$\beta=-\frac{5}{2}-2\alpha. \qquad (4)$$

代入(2)，得

$$\alpha^2+2\alpha\left(-\frac{5}{2}-2\alpha\right)=-2,$$

就是
$$3\alpha^2+5\alpha-2=0.$$

$$\therefore\quad \alpha_1=-2,\qquad \alpha_2=\frac{1}{3}.$$

代入(4)，得
$$\beta_1=\frac{3}{2},\quad \beta_2=-\frac{19}{6}.$$

把$\begin{cases}\alpha_1=-2\\ \beta_1=\dfrac{3}{2}\end{cases}$代入(3)是适合的，所以它是列出的方程组的解。

把$\begin{cases}\alpha_2=\dfrac{1}{3}\\ \beta_2=-\dfrac{19}{6}\end{cases}$代入(3)不适合，所以它不是列出的方程组的解.

所以，原方程的三个根是 -2, -2 和 $\frac{3}{2}$.

例 3. 已知方程
$$x^4-4x^3-24x^2+56x+52=0$$
的四个根成等差数列，解这个方程.

【解】 设这个方程的四个根是
$$a-3b,\ a-b,\ a+b,\ a+3b,$$
那末，根据根与系数的关系，可得方程组:

$$\begin{cases}(a-3b)+(a-b)+(a+b)+(a+3b)=4,\\ (a-3b)(a-b)+(a-3b)(a+b)+(a-3b)(a+3b)\\ \quad +(a-b)(a+b)+(a-b)(a+3b)+(a+b)(a+3b)=-24,\\ (a-3b)(a-b)(a+b)+(a-3b)(a-b)(a+3b)\\ \quad +(a-3b)(a+b)(a+3b)+(a-b)(a+b)(a+3b)=-56,\\ (a-3b)(a-b)(a+b)(a+3b)=52.\end{cases}$$

就是

$$\begin{cases}4a=4, & (1)\\ 3a^2-5b^2=-12, & (2)\\ a(a^2-5b^2)=-14, & (3)\\ (a^2-9b^2)(a^2-b^2)=25. & (4)\end{cases}$$

从(1)得 $a=1$. 代入(2), 得

$$3-5b^2=-12,\quad \therefore\ b^2=3,\quad \therefore\ b=\pm\sqrt{3}.$$

以 $\begin{cases}a=1\\ b=\sqrt{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=1\\ b=-\sqrt{3}\end{cases}$ 代入(3)和(4)都适合, 所以它们都是列出的方程组的解. 由此可知, 原方程的四个根是

$$1\pm3\sqrt{3},\ 1\pm\sqrt{3}.$$

说明 1. 已知四个根成等差数列, 虽也可设成这四个根是 a, $a+b$, $a+2b$, $a+3b$, 但这样列出的方程组在求解时就较繁. 上面解法里采取这样假设, 可以从一个等式中求出一个未知数, 计算也就比较简单. 解这类问题时, 应该善于掌握这种技巧.

2. 本题中列出的方程组只有 2 个未知数 a 和 b, 但是有四个方程. 求 a 和 b 只需选取较易计算的两个方程(一般, 可取次数较低的两个方程)即可, 但这样求出的解还必须代入其他两个方程中进行检验, 经验算后能适合的才是方程组的解.

习 题 5·3(2)

1. 已知方程 $2x^3-5x^2-4x+12=0$ 有二重根, 解这个方程.

2. 已知方程 $12x^3-8x^2-3x+2=0$ 有两个根互为相反数, 解这个方程.

3. 已知方程 $x^4-4x^3+10x^2-12x+9=0$ 的根两两相等, 解这个方程.

4. 已知方程 $x^3-(2+3i)x^2-(1-5i)x+2(1-i)=0$ 的三根成等比数列, 解这个方程.

5. k 是什么数时, 方程 $x^3+6x^2+7x+k=0$ 的三个根成等差数列?

这些根是什么?

在学习一元二次方程时,曾利用根与系数的关系,不通过解一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0,$$

而直接计算它的两个根 x_1 与 x_2 的某些特殊代数式,如

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2},\quad x_1^2+x_2^2$$

等等的值;以及作出另一个新的方程,使它的两个根与原方程的两个根间有某种指定的关系,如为原根的倒数,原根的平方,等等. 这类问题也可推广到一元 n 次方程.

例 4. 已知方程 $x^3+px^2+qx+r=0$ 的三个根是 α, β, γ, 求 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ 的值.

分析 从 $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$ 可以推得 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$, 所以只需先应用根与系数的关系求出 $\alpha+\beta+\gamma$ 和 $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ 的值,代入即得.

【解】 $\because\quad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$,

根据根与系数的关系,有

$$\alpha+\beta+\gamma=-p,$$

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=q.$$

$$\therefore\quad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(-p)^2-2q=p^2-2q.$$

例 5. 已知方程 $x^3+px^2+qx+r=0$ 的三个根是 α, β, γ, 求作一个以 α^2, β^2, γ^2 为其根的新方程.

分析 设所求的方程是

$$x^3+lx^2+mx+n=0.$$

那末,应有

$$\begin{cases}-l=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2,\\ m=\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2,\\ -n=\alpha^2\beta^2\gamma^2.\end{cases}$$

因此,只需先仿照例 4 计算出 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$, $\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2$ 和 $\alpha^2\beta^2\gamma^2$

的值，代入上式印得所求的方程．为了方便起见，不妨把所求的方程假设成

$$x^3-lx^2+mx-n=0.$$

【解】 设所求的方程是

$$x^3-lx^2+mx-n=0,$$

那末

$$l=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$
$$=p^2-2q,$$
$$m=\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2$$
$$=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)=q^2-2pr,$$
$$n=\alpha^2\beta^2\gamma^2=(\alpha\beta\gamma)^2=r^2.$$

所以，所求的方程是

$$x^3-(p^2-2q)x^2+(q^2-2pr)x-r^2=0.$$

习 题 5·3(3)

1．已知方程 $2x^3-3x-5=0$ 的三个根是 α, β, γ，求下列各式的值：

(1) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$；　　(2) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$；

(3) $\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}+\frac{1}{\alpha\beta}$；　　(4) $\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+\alpha^2\beta^2$.

2．已知方程 $x^3+px^2+qx+r=0$ 的三个根是 α, β, γ，求作三次方程 $\varphi(y)=0$，使它的三个根是：

(1) $-\alpha, -\beta, -\gamma$；　　(2) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$；

(3) $k\alpha, k\beta, k\gamma$；　　(4) $-\frac{1}{\alpha}, -\frac{1}{\beta}, -\frac{1}{\gamma}$.

3．已知方程 $2x^3-3x^2+x+1=0$ 的三个根是 α, β, γ，求作一个三次方程，使它的根是：

(1) $\alpha-3, \beta-3, \gamma-3$；

(2) $\frac{1}{\alpha-3}, \frac{1}{\beta-3}, \frac{1}{\gamma-3}$.

[提示：(2)可以应用(1)求得的方程来作.]

§5·4 实系数一元 n 次方程

在方程

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0 \quad (a_0\neq 0)$$

里，如果各项的系数都是实数，称这样的方程为**实系数一元 n 次方程**．很明显，实系数一元 n 次方程应该具有一般的一元 n 次方程的一切性质．

现在来研究实系数一元 n 次方程所特有的一个重要性质．

我们知道，对于实系数一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0)$$

来说，如果判别式 $b^2-4ac<0$，那末它的两个根

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad 和 \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

是共轭虚数．这里可以看到，实系数一元二次方程的虚根是成对地出现的．

下面来证明，对于一般的实系数一元 n 次方程，也都具有这样的性质．

定理 如果实系数一元 n 次方程 $f(x)=0$ 有一个虚根 $a+bi$，这里 a，b 都是实数，$b\neq 0$，那末它必定有另一个虚根 $a-bi$．

通常称这个定理为**实系数方程虚根成对定理**．

分析 要证明 $a-bi$ 是方程 $f(x)=0$ 的另一个根，只需证明多项式 $f(x)$ 能被

$$[x-(a+bi)][x-(a-bi)]$$

整除．因为 n 次多项式 $f(x)$ 被 x 的二次式所除，得到的商是 x 的 $n-2$ 次多项式，而余式最高只能是 x 的一次式，所以可先设

$$f(x)=[x-(a+bi)][x-(a-bi)]Q(x)+(px+q),$$
再应用已知条件 $a+bi$ 是方程 $f(x)=0$ 的根，来证明 p, q 都是 0.

【证】 设用

$$g(x)=[x-(a+bi)][x-(a-bi)]=x^2-2ax+(a^2+b^2)$$

除 $f(x)$，所得的商是 $Q(x)$，余式是 $px+q$. 那末就有

$$f(x)=[x-(a+bi)][x-(a-bi)]Q(x)+(px+q). \quad (1)$$

因为被除式 $f(x)$ 和除式 $g(x)$ 的各项系数都是实数，而通过除法是不会得出虚数的（这在具体写出相除的除式中可看得很清楚），所以，商 $Q(x)$ 和余式 $px+q$ 的各项系数都是实数.

因为 $a+bi$ 是方程 $f(x)=0$ 的根，所以 $f(a+bi)=0$. 代入式(1)，得

$$0=0+p(a+bi)+q.$$

即

$$(pa+q)+pbi=0. \quad (2)$$

因为 $pa+q$ 和 pb 都是实数，根据复数等于零的条件，从式(2)可得

$$\begin{cases} pa+q=0, & (3) \\ pb=0. & (4) \end{cases}$$

因为 $b\neq 0$, 所以从式(4)可知 $p=0$. 代入式(3)，得 $q=0$. 因此，式(1)可以写成

$$f(x)=[x-(a+bi)][x-(a-bi)]Q(x), \quad (5)$$

从而有

$$f(a-bi)=0.$$

所以，$a-bi$ 是方程 $f(x)=0$ 的根. 定理得证.

例 1. 已知方程 $2x^5-7x^4+8x^3-2x^2+6x+5=0$ 的两个根是 $2-i$, i, 解这个方程.

【解】 这是一个实系数一元五次方程，根据已知条件，$2-i$, i 是它的根，可知 $2+i$, $-i$ 也是它的根.

设这个方程的第五个根是 α, 那末，根据根与系数关系，有

$$\alpha+(2+i)+(2-i)+i+(-i)=\frac{7}{2}. \tag{1}$$

由此可知 $\alpha=-\frac{1}{2}$.

所以，这个方程的五个根是 $-\frac{1}{2}$, $2\pm i$, $\pm i$.

注意 1. 在应用虚根成对定理时，首先要判定原方程各项系数都是实数；

2. 如果题设条件正确的话，应用式(1)求得的 α 必定适合，所以检验的步骤这里可略去.

例 2. 求作一个次数最低的实系数方程 $f(x)=0$, 使它的一个根是 $-\frac{1}{2}+i$, 另一个根是 $\sqrt{2}$.

【解】 因为 $-\frac{1}{2}+i$ 是实系数方程 $f(x)=0$ 的根，所以 $-\frac{1}{2}-i$ 也是方程 $f(x)=0$ 的根. 要使方程 $f(x)=0$ 的次数最低，这个方程必须，并且只能有三个根: $-\frac{1}{2}+i$, $-\frac{1}{2}-i$ 和 $\sqrt{2}$. 所以，所求的方程是

$$\left[x-\left(-\frac{1}{2}+i\right)\right]\left[x-\left(-\frac{1}{2}-i\right)\right](x-\sqrt{2})=0,$$

即
$$\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-i^2\right](x-\sqrt{2})=0,$$

$$\left(x^2+x+\frac{5}{4}\right)(x-\sqrt{2})=0,$$

$$x^3+(1-\sqrt{2})x^2+\left(\frac{5}{4}-\sqrt{2}\right)x-\frac{5}{4}\sqrt{2}=0.$$

注 在解本题时，当确定 $f(x)=0$ 是三次方程以后，也可设这个方程是

$$x^3-lx^2+mx-n=0,$$

再应用根与系数的关系，求出

$$l=\left(-\frac{1}{2}+i\right)+\left(-\frac{1}{2}-i\right)+\sqrt{2}=-1+\sqrt{2},$$

$$m=\sqrt{2}\left[\left(-\frac{1}{2}+i\right)+\left(-\frac{1}{2}-i\right)\right]+\left(-\frac{1}{2}+i\right)\left(-\frac{1}{2}-i\right)$$

$$=\frac{5}{4}-\sqrt{2},$$

$$n=\left(-\frac{1}{2}+i\right)\left(-\frac{1}{2}-i\right)\sqrt{2}=\frac{5}{4}\sqrt{2}.$$

从而写出所求的方程.

习 题 5·4

1. (1) 已知方程 $3x^3-4x^2+x+88=0$ 有一个根是 $2+\sqrt{7}i$，解这个方程；

(2) 已知方程 $x^3-(3+\sqrt{3})x^2+2(3+\sqrt{3})x-4(1+\sqrt{3})=0$ 的一个根是 $1+\sqrt{3}i$，解这个方程.

2. 求作一个次数最低的实系数方程，使它含有下列的根：

(1) $-2,\ 2+i$;　　(2) $2+i,\ -1+i$;

(3) $1-\sqrt{2}i,\ i,\ 0$;　　(4) $-1+\sqrt{3}i,\ 1-\sqrt{3}i$.

3. 已知实系数方程 $f(x)=0$ 的开头两项是 x^3+x^2，并且它有一个根是 $-1+\sqrt{2}i$，

(1) 写出这个方程；

(2) 求这个方程的另外两个根.

4. 已知方程 $x^4-4x^3+11x^2-14x+10=0$ 的一个根是 $a+bi$ 的形式，另一个根是 $a+2bi$ 的形式（a, b 都是实数，$b\neq0$），解这个方程.

5. 根据实系数方程虚根成对定理，证明：

(1) 一个奇数次的实系数方程，至少有一个实数根；

(2) 如果 $a+bi$ 是一元 n 次方程的 k 重虚数根，那末 $a-bi$ 也是这个方程的 k 重虚数根.

§5·5 有理系数一元 n 次方程

在方程

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0 \quad (a_0\neq 0)$$

里，如果各项的系数都是有理数，这样的方程就称为**有理系数一元 n 次方程**. 特别，如果各项的系数都是整数，这样的方程就称为**整系数一元 n 次方程**. 很明显，任何一个有理系数的一元 n 次方程，都可变形成为与它同解的整系数一元 n 次方程.

有理系数一元 n 次方程，除掉具有实系数一元 n 次方程所具有的一切性质以外，还具有一些特殊的性质.

1. 有理系数方程 $f(x)=0$ 的有理根 对于有理系数方程 $f(x)=0$, 最常碰到的问题是要找出它的有理根，或者确定它没有有理根. 因为，任何一个有理系数方程都可以变形成为与它同解的整系数方程，所以这个问题也就可以归结为怎样来找出整系数方程

$$f(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n=0 \quad (b_0\neq 0)$$

的有理根.

首先，我们来看几个具有有理根的整系数方程，考察一下它们的根与系数之间有怎样特定的关系.

具有整数根 2, -3, -5 的三次方程是

$$(x-2)(x+3)(x+5)=0,$$

就是

$$x^3+6x^2-x-30=0.$$

这里，可以看出，2, 3, 5 正是这方程的常数项 30 的三个约数.

具有分数根 $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{5}$ 的三次方程是

$$(2x-1)(3x+1)(5x+1)=0,$$

就是 $$30x^3+x^2-6x-1=0.$$

这里，可以看出，这三个根中的分母 2, 3, 5 恰巧是这方程的三次项系数 30 的三个约数.

具有分数根 $\frac{3}{2}$ 和 $\frac{5}{7}$ 的二次方程是

$$(2x-3)(7x-5)=0.$$

就是 $$14x^2-31x+15=0.$$

这里，又可以看出，这两个根的分子 3 和 5 是这方程的常数项 15 的约数，而分母 2, 7 却是这方程的二次项系数 14 的约数.

从上面的观察中，可以得到启发. 如果既约分数 $\frac{p}{q}$ 是方程 $f(x)=0$ 的根，那末 p 应该是常数项的约数，q 应该是最高次项的系数的约数.

定理 1. 如果既约分数 $\frac{p}{q}$ 是整系数方程

$$f(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n=0 \quad (b_0\neq 0)$$

的一个根，那末 p 一定是 b_n 的一个约数，q 一定是 b_0 的一个约数.

*【证】 因为 $\frac{p}{q}$ 是整系数方程 $f(x)=0$ 的一个根，所以

$$b_0\left(\frac{p}{q}\right)^n+b_1\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}+\cdots+b_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)+b_n=0.$$

两边乘以 q^n，得

$$b_0p^n+b_1p^{n-1}q+\cdots+b_{n-1}pq^{n-1}+b_nq^n=0.$$

$$\therefore\quad b_nq^n=-p(b_0p^{n-1}+b_1qp^{n-2}+\cdots+b_{n-1}q^{n-1}).$$

$$\frac{b_nq^n}{p}=-(b_0p^{n-1}+b_1qp^{n-2}+\cdots+b_{n-1}q^{n-1}).$$

这个等式的等号右边是一个整数（由于 $b_0, b_1, \cdots, b_{n-1}, p, q$ 都是整

数)，所以 $\frac{b_n q^n}{p}$ 应该也是一个整数，于是 $b_n q^n$ 应该能被 p 整除. 但 q 与 p 互质，因此 q^n 不能被 p 整除，从而知 b_n 必须能被 p 整除. 即 p 为 b_n 的约数.

类似地，从

$$\frac{b_0 p^n}{q} = -(b_1 p^{n-1} + \cdots + b_{n-1} p q^{n-2} + b_n q^{n-1}).$$

可以推导出 q 必须是 b_0 的约数.

从上面的定理，容易推出：

推论 1. 如果整系数方程

$$f(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_{n-1} x + b_n = 0$$

有整数根 $\boldsymbol{p}$，那末 p 是常数项 b_n 的约数.

推论 2. 如果最高次项的系数为 1 的整系数方程

$$f(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_{n-1} x + b_n = 0$$

有有理根，这种有理根只能是整数.

我们知道，任何一个整数的约数只有有限个，因此，应用上面的定理，通过试探的方法，就可以把整系数方程的所有有理根逐个找出，或者证实它不具有有理根. 但是必须注意：在应用定理时，首先要判定原方程是整系数方程.

例 1. 求方程 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3 = 0$ 的有理根.

分析 这里，最高次项系数 2 的约数只可能是 ± 1，± 2，常数项 3 的约数只可能是 ± 1，± 3，所以，原方程的有理根只可能是 ± 1，± 3，$\pm \frac{1}{2}$，$\pm \frac{3}{2}$. 容易看出，$f(1) = 0$，所以 1 是原方程的根. 这样，只要用综合除法，求出 $f(x)$ 除以 $x-1$ 的商 $g(x)$，再解二次方程 $g(x) = 0$ 即得.

【解】 根据上面的定理，所给整系数方程 $f(x) = 0$ 的有理根只能是 ± 1，± 3，$\pm \frac{1}{2}$，$\pm \frac{3}{2}$，今用试除法来看一下：

$$\begin{array}{rrrr|l} 2 & +3 & -8 & +3 & 1 \\ & +2 & +5 & -3 & \\ \hline 2 & +5 & -3, & 0 & \end{array}$$

可见 $x=1$ 是原方程的根. 原方程其余的根就是方程

$$2x^2+5x-3=0$$

的根. 解这个方程, 得 $x=-3$ 或者 $x=\frac{1}{2}$.

因此, 原方程的有理根是 $1, -3, \frac{1}{2}$.

注意 1. 因为任何一个整数总有约数 ±1, 所以在求整系数方程 $f(x)=0$ 的有理根时, 总要考察 1 或者 -1 是不是它的根. 对于这一步, 只需直接计算[可以应用习题 5·1(2)第 4 题的结论] $f(1)$ 和 $f(-1)$ 是不是等于零而加以肯定.

2. 当求出整系数方程 $f(x)=0$ 的一个有理根 α 以后, 用综合除法求出 $f(x)$ 除以 $x-\alpha$ 的商 $g(x)$, 就会得到一个降次方程 $g(x)=0$. 所以, 下一步只要再解这个方程就可以了. 特别是, 如果 $g(x)=0$ 已是二次方程, 就不必再用试探的方法来解.

例 2. 求方程

$$f(x)=2x^5+3x^4-15x^3-26x^2-27x-9=0$$

的有理根, 然后再求出其余的根.

【解】 原方程可能有的有理根是:

$$\pm1,\ \pm3,\ \pm9,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{3}{2},\ \pm\frac{9}{2}.$$

$\because f(1)\neq0,\ f(-1)\neq0,\ \therefore x=1$ 和 $x=-1$ 都不是它的根.

对于 $x=3$:

$$\begin{array}{rrrrrr|l} 2 & +3 & -15 & -26 & -27 & -9 & 3 \\ & +6 & +27 & +36 & +30 & +9 & \\ \hline 2 & +9 & +12 & +10 & +3, & 0 & \end{array}$$

可知 $x=3$ 是原方程的根，并得降次方程

$$f_1(x)=2x^4+9x^3+12x^2+10x+3=0.$$

这个方程的各项系数都是正数，故不可能有正数根. 因此，它可能有的有理根是 -1，-3，$-\frac{1}{2}$，$-\frac{3}{2}$. 但是 $x=-1$ 不是 $f(x)=0$ 的根，它当然不可能是 $f_1(x)=0$ 的根.

对于 $x=-3$:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
2 & +9 & +12 & +10 & +3 & -3 \\
 & -6 & -9 & -9 & -3 & \\
\hline
2 & +3 & +3 & +1, & 0 &
\end{array}$$

可知 $x=-3$ 是它的根，并得降次方程

$$f_2(x)=2x^3+3x^2+3x+1=0.$$

这个方程的可能有的有理根只能是 $-\frac{1}{2}$. （想一想，这是为什么?）

对于 $x=-\frac{1}{2}$:

$$\begin{array}{r|rrrr|l}
 & 2 & +3 & +3 & +1 & -\frac{1}{2} \\
 & & -1 & -1 & -1 & \\
\hline
2 & 2 & +2 & +2, & 0 & \\
\hline
 & 1 & +1 & +1 & &
\end{array}$$

可知 $x=-\frac{1}{2}$ 是它的根，并得降次方程

$$f_3(x)=x^2+x+1=0.$$

解这个方程，得

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}.$$

答：原方程的有理根是 3，-3，$-\frac{1}{2}$，另两个根是 $\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$.

注　在实际解题时，可以略去上面解中所作的说明，而只列出如下的算式：

$$
\begin{array}{r|rrrrrr|c}
 & 2 & +3 & -15 & -26 & -27 & -9 & 3 \\
 & & +6 & +27 & +36 & +30 & +9 & \\
\cline{2-7}
 & 2 & +9 & +12 & +10 & +3, & 0 & -3 \\
 & & -6 & -9 & -9 & -3 & & \\
\cline{2-7}
 & 2 & +3 & +3 & +1, & 0 & & -\dfrac{1}{2} \\
 & & -1 & -1 & -1 & & & \\
\cline{2-7}
2 & 2 & +2 & +2, & 0 & & & \\
\cline{2-4}
 & 1 & +1 & +1 & & & &
\end{array}
$$

所以，原方程的有理根是 $3, -3, -\frac{1}{2}$. 解方程 $x^2+x+1=0$，得原方程其余的根是 $\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$.

例 3. 证明方程 $2x^3+2x-1=0$ 没有有理根.

【证】 这个方程可能有的有理根是 $\pm1, \pm\frac{1}{2}$.

今　$f(1)=3\neq0,\qquad f(-1)=-5\neq0,$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\neq0,\quad f\left(-\frac{1}{2}\right)=-2\frac{1}{4}\neq0.$$

$\pm1, \pm\frac{1}{2}$ 都不是它的根，所以原方程没有有理根.

习　题　5·5(1)

1．求下列方程的有理根：

(1) $x^3-5x^2-2x+24=0$;　　(2) $2x^3-x^2-5x-2=0$;

(3) $12x^4-20x^3-11x^2+5x+2=0$;

(4) $2x^5-9x^4+3x^3+10x^2+21x+9=0$.

2．求证下列各方程都没有有理根：

(1) $x^3+x+3=0$;　　(2) $x^5-5=0$;

(3) $x^4-x+6=0$;　　(4) $x^3-x^2+3x-2=0$.

3. 求证下列方程都没有整数根:

(1) $16x^4-12x^3+4x^2-3x+1=0$;

(2) $24x^5+10x^4+x^3+19x^2+5x+6=0$.

[提示: (2)只需验证 $f(-1)\neq 0, f(-2)\neq 0, f(-3)\neq 0$.]

4. 解下列方程:

(1) $x^5+2x^4+2x^3+4x^2+5x+2=0$;

(2) $x^4+5x^3+8x^2+x-15=0$;

(3) $2x^4-5x^3+3x^2+4x-6=0$;

(4) $x^5-\frac{1}{2}x^4-2x+1=0$.

[提示: 先求出有理根,再解降次方程.]

5. 分解下列各多项式的有理系数因式:

(1) $x^3+3x^2-16x-48$;

(2) $6x^4+19x^3-7x^2-26x+12$.

[提示: 先求出各多项式的有理根,再用因式定理.]

***2. 有理系数方程 $f(x)=0$ 的二次不尽根** 我们知道,在方程

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0)$$

里,如果 a, b, c 都是有理数, $b^2-4ac>0$, 且 b^2-4ac 不是一个完全平方数,那末它的两个根

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad 和 \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

都是无理数. 这样的根通常称为二次不尽根. 这里可以看到, 象二次方程的虚根一样,二次方程的二次不尽根也是成对地出现的.

现在来证明, 一般的有理系数方程 $f(x)=0$, 都具有这样的性质.

定理 2. 如果有理系数方程

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0 \quad (a_0\neq 0)$$

有无理根 $a+\sqrt{b}$, 这里 a, b 都是有理数, $\sqrt{b}$ 是无理数,那末它一定还有一个无理根 $a-\sqrt{b}$.

这个定理的证明,可以仿照虚根成对定理的证法.

【证】 设

$$f(x)=[x-(a+\sqrt{b})][x-(a-\sqrt{b})]Q(x)+px+q. \tag{1}$$

这里，因为除式 $[x-(a+\sqrt{b})][x-(a-\sqrt{b})]=x^2-2ax+a^2-b$ 是 x 的有理系数二次多项式，被除式 $f(x)$ 是 x 的有理系数 n 次多项式，而两个有理数的加减乘除仍是有理数，通过这里的除法是不会得出无理数或虚数的，所以商 $Q(x)$ 是 x 的有理系数 $n-2$ 次多项式，而余式中 p 和 q 也都是有理数.

因为 $a+\sqrt{b}$ 是方程 $f(x)=0$ 的根，所以 $f(a+\sqrt{b})=0$. 代入式(1)，得

$$0=0+p(a+\sqrt{b})+q.$$

就是

$$(pa+q)+p\sqrt{b}=0. \tag{2}$$

因为 $pa+q$ 是有理数，而 $p\sqrt{b}$ 是无理数，所以从式(2)可推出

$$\begin{cases} pa+q=0, & (3)\\ p\sqrt{b}=0. & (4)\end{cases}$$

由式(4)，因为 $\sqrt{b}\neq 0$，所以 $p=0$. 代入式(3)，得 $q=0$.因此，式(1)可以写成

$$f(x)=[x-(a+\sqrt{b})][x-(a-\sqrt{b})]Q(x), \tag{5}$$

从而有

$$f(a-\sqrt{b})=0,$$

所以 $x=a-\sqrt{b}$ 是方程 $f(x)=0$ 的根. 定理得证.

把上面的定理加以推广，还可以得出以下的定理①:

定理 3. 如果有理系数方程

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0 \quad (a_0\neq 0)$$

(1) 有一个无理根 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$，这里 a, b 是有理数，而 $\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$ 是无理数，那末它一定还有三个无理根:

$$\sqrt{a}-\sqrt{b},\ -\sqrt{a}+\sqrt{b},\ -\sqrt{a}-\sqrt{b}.$$

(2) 有一个虚根 $\sqrt{a}+\sqrt{b}\,i$，这里 a, b 是有理数，而 $\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$ 是无理数，那末它一定还有三个虚根:

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}\,i,\ -\sqrt{a}+\sqrt{b}\,i,\ -\sqrt{a}-\sqrt{b}\,i.$$

注意 定理 2 不能推广到任意无理根的情形. 例如，有理系数方

---

① 证明较繁，这里把它略去了.

程 $f(x)=0$ 如具有三次不尽根 $x=a+\sqrt[3]{b}$（a 和 b 皆有理数，$\sqrt[3]{b}$ 为无理数），但推不出 $f(x)=0$ 必具有根 $x=a-\sqrt[3]{b}$。

例 4. 已知方程

$$f(x)=x^6-2x^5+8x^2-32x+64=0。$$

有一个根 $\sqrt{3}+i$，解这个方程.

【解】 这是一个有理系数方程，它既有一个虚根 $\sqrt{3}+i$，必定还有另外三个虚根 $\sqrt{3}-i$，$-\sqrt{3}+i$，$-\sqrt{3}-i$. 可以推出，$f(x)$能被

$$[x-(\sqrt{3}+i)][x-(\sqrt{3}-i)][x-(-\sqrt{3}+i)][x-(-\sqrt{3}-i)]$$
$$=x^4-4x^2+16$$

整除. 做除法，求出商是 x^2-2x+4，再解二次方程

$$x^2-2x+4=0,$$

求得另两个根是 $x=1+\sqrt{3}i$ 和 $x=1-\sqrt{3}i$. 所以原方程的六个根是$\sqrt{3}\pm i$，$-\sqrt{3}\pm i$ 和 $1\pm\sqrt{3}i$.

注 本题在确定方程 $f(x)=0$ 有四个根 $\sqrt{3}\pm i$，$-\sqrt{3}\pm i$ 后，也可以先假设另两个根是 α 和 β，根据根与系数关系列出方程组，从而求得 α 和 β 的值.

例 5. 求作一个次数最低的有理系数方程 $f(x)=0$，使它的一个根是 $\sqrt{3}+2\sqrt{2}$.

【解】 既然 $\sqrt{3}+2\sqrt{2}$（就是 $\sqrt{3}+\sqrt{8}$）是有理系数方程 $f(x)=0$ 的一个根，根据定理 3，可知所求的方程至少还要有另外三个根：

$$\sqrt{3}-2\sqrt{2},\quad -\sqrt{3}+2\sqrt{2},\quad -\sqrt{3}-2\sqrt{2}.$$

所以，所求的方程是

$$[x-(\sqrt{3}+2\sqrt{2})][x-(\sqrt{3}-2\sqrt{2})][x-(-\sqrt{3}+2\sqrt{2})]$$
$$\times[x-(-\sqrt{3}-2\sqrt{2})]=0,$$

就是
$$[(x-\sqrt{3})^2-8][(x+\sqrt{3})^2-8]=0,$$
$$[(x^2-5)-2\sqrt{3}x][(x^2-5)+2\sqrt{3}x]=0,$$
$$x^4-22x^2+25=0.$$

注 对于这类问题，还可用另一种解法. 因为，具有根 $\sqrt{3}+2\sqrt{2}$ 的最低次方程是 $x=\sqrt{3}+2\sqrt{2}$. 现在要使所求的方程各项系数都是有理数，可以用逐次平方的办法，把这个等式的系数有理化.

$$\because \quad x-\sqrt{3}=2\sqrt{2},$$

两边平方，得 $\quad x^2-2\sqrt{3}x+3=8,$

即 $\quad x^2-5=2\sqrt{3}x.$

两边再平方，得 $\quad x^4-10x^2+25=12x^2,$

所以 $\quad x^4-22x^2+25=0.$

这就是所求的方程.

习　题　5·5(2)

1. 已知$1+\sqrt{2}$是下面这两个方程公有的一个根：

(1) $x^3-4x^2+3x+2=0,$

(2) $x^3-2(\sqrt{2}+1)x^2+(1+4\sqrt{2})x-2=0,$

解这两个方程.

[提示：(1)可以应用本节中的定理2来解，(2)不能应用定理，应先求出一个降次方程后再解.]

2. 已知有理系数方程$x^3-3x^2+ax+b=0$有一个根是$1-\sqrt{2}$，求a，b的值，并解这个方程.

3. 求作含有根$\sqrt{3}-2$和$1+i$的次数最低的有理系数方程.

4. 求证：$1+\sqrt{2}$是方程

$$f(x)=x^5-3x^4-2x^3+6x^2+5x+1=0$$

的一个二重根，并解这个方程.

5. 已知方程$x^5+x^4-2x^3-2x^2+25x+25=0$有一个根是$\sqrt{3}-\sqrt{2}i$，解这个方程.

§5·6　几种特殊类型的高次方程的解法

作为本章的结束，下面介绍几种特殊类型的高次方程的解法.

1. 二项方程　形如

$$a_0x^n+a_n=0$$

的方程称为**二项方程**，这里 n 是自然数，a_0 和 a_n 是不等于零的复数.

很明显，这类方程都可以化成

$$x^n=-\frac{a_n}{a_0},$$

从而应用复数的开 n 次方的方法解出.

例 1. 解方程 $(-2-2i)x^4-8=0$.

【解】 原方程可化为 $x^4=\dfrac{8}{-2-2i}$，即

$$x^4=-2+2i.$$

$$\therefore \quad x^4=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

$$\therefore \quad x=\sqrt[4]{8}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{4}\right)$$
$$(k=0,\ 1,\ 2,\ 3).$$

就是

$$x_1=\sqrt[4]{8}\left(\cos\frac{3\pi}{16}+i\sin\frac{3\pi}{16}\right),$$

$$x_2=\sqrt[4]{8}\left(\cos\frac{11\pi}{16}+i\sin\frac{11\pi}{16}\right),$$

$$x_3=\sqrt[4]{8}\left(\cos\frac{19\pi}{16}+i\sin\frac{19\pi}{16}\right),$$

$$x_4=\sqrt[4]{8}\left(\cos\frac{27\pi}{16}+i\sin\frac{27\pi}{16}\right).$$

当二项方程 $x^n+b=0$ 的 n 是 3, 4 或 6, 且 b 是实数时，还可用因式分解的方法来解.

例 2. 解方程:

(1) $x^4+16=0$; (2) $x^6+a^6=0$.

【解】 (1) $\because\ x^4+16=x^4+8x^2+16-8x^2$

$$=(x^2+4)^2-(\sqrt{8}x)^2$$

$$=(x^2+2\sqrt{2}x+4)(x^2-2\sqrt{2}x+4),$$

所以，原方程可化成

$$(x^2+2\sqrt{2}x+4)(x^2-2\sqrt{2}x+4)=0.$$

由$x^2+2\sqrt{2}x+4=0$，得

$$x_{1,2}=-\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i;$$

由$x^2-2\sqrt{2}x+4=0$，得

$$x_{3,4}=\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i.$$

(2) $\because\ x^6+a^6=(x^2)^3+(a^2)^3=(x^2+a^2)(x^4-a^2x^2+a^4)$

$$=(x^2+a^2)(x^4+2a^2x^2+a^4-3a^2x^2)$$

$$=(x^2+a^2)(x^2-\sqrt{3}ax+a^2)(x^2+\sqrt{3}ax+a^2),$$

所以，原方程可以拆成3个方程：

$x^2+a^2=0$，　　从而得　$x_{1,2}=\pm ai$；

$x^2-\sqrt{3}ax+a^2=0$，　　从而得　$x_{3,4}=\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}\pm i)a$；

$x^2+\sqrt{3}ax+a^2=0$，　　从而得　$x_{5,6}=-\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}\pm i)a$.

习　题　5·6(1)

1．解下列二项方程：

(1) $x^4-4i=0$；　　(2) $x^5-1=0$；

(3) $x^5-2+2i=0$；　　(4) $(1-\sqrt{3}i)x^6-2=0$；

(5) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)x^4-\sqrt{3}-i=0$.

2．用因式分解的方法，解下列各二项方程：

(1) $x^3-64=0$；　　(2) $8x^3+27=0$；

(3) $81x^4-16=0$；　　(4) $x^4+625=0$；

(5) $x^6-64=0$；　　(6) $64x^6+1=0$.

2. 三项方程 形如

$$ax^{2n}+bx^n+c=0$$

的方程称为**三项方程**，这里 n 是自然数，a, b, c 是不等于零的复数.

当 $n=2$ 时，这个方程就是在代数第二册里学过的双二次方程

$$ax^4+bx^2+c=0,$$

所以，三项方程也可以象双二次方程一样，令 $x^n=y$ 而化成二次方程

$$ay^2+by+c=0.$$

这样，在这个方程里，求出 y 的两个根 y_1, y_2 以后，只要再解下面的两个二项方程

$$x^n=y_1 \quad 和 \quad x^n=y_2,$$

即得原方程的解.

例 3. 解方程 $12x^6-8x^3+1=0$.

【解】 令 $x^3=y$, 得

$$12y^2-8y+1=0.$$

解这个方程，得

$$y_1=\frac{1}{2}, \quad y_2=\frac{1}{6}.$$

从 $x^3=\frac{1}{2}$, 得 $x_1=\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$, $x_{2,3}=\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.

从 $x^3=\frac{1}{6}$, 得 $x_4=\frac{\sqrt[3]{36}}{6}$, $x_{5,6}=\frac{\sqrt[3]{36}}{6}\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.

注 从 $x^3=1$ 的三个根是 1, $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$, 直接可以知道：方程 $x^3=\frac{1}{2}$ 的三个根分别是 $x^3=1$ 的三个根乘以 $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$, 即 $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$.

习 题 5·6(2)

1. 解下列方程:

(1) $x^6-5x^3+6=0$;　　(2) $36x^8-13x^4+1=0$;

(3) $x^6-2x^3+2=0$;　　(4) $x^8+8x^4-9=0$.

2. 解下列方程:

(1) $(x^4+3)^4-13(x^4+3)^2+36=0$;

(2) $(x^2+3)^4+12(x^2+3)^2-64=0$.

[提示: 分别令 $x^4+3=y$, $x^2+3=y$.]

***3. 倒数方程** 我们来解下面的方程:

$$x^4+3x^3+2x^2+3x+1=0, \qquad \text{(I)}$$

这个方程的各项系数有一个重要的特征: 与首末两项等距的两项系数相同. 根据这个特征, 可把系数相同的两项结合起来, 即得

$$(x^4+1)+3(x^3+x)+2x^2=0. \qquad (1)$$

因为 $x=0$ 显然不是方程(1)的根, 用 x^2 除方程(1)的两边, 可得

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0. \qquad (2)$$

容易看出, 这里

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2x\cdot\frac{1}{x}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2,$$

所以, 如果令 $x+\dfrac{1}{x}=y$, 由式(2)可以得出一个关于 y 的二次方程

$$y^2-2+3y+2=0.$$

就是

$$y^2+3y=0. \qquad (3)$$

由此, 从式(3)可得

$$y_1=0, \quad y_2=-3.$$

把这两个值分别代入 $x+\dfrac{1}{x}=y$, 就得到两个关于 x 的方程:

(i) $x+\dfrac{1}{x}=0$. 由此, 得 $x^2+1=0$.

$$\therefore\quad x_1=i, \quad x_2=-i.$$

(ii) $x+\dfrac{1}{x}=-3$. 由此, 得 $x^2+3x+1=0$.

$$\therefore\quad x_3=\frac{-3+\sqrt{5}}{2},\quad x_4=-\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

这就解得了这个方程的 4 个根.

从求得的 4 个根中，还可以看出:

$$x_1\cdot x_2=i(-i)=1,$$

$$x_3\cdot x_4=\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)=1.$$

这就是说，这个方程的每两个根互成倒数. 象(I)这样的方程，把它称为**第一类型的偶次倒数方程**.

一般地说，对于 $2m$ 次方程 $f(x)=0$，如果距首末两项等距的每两项系数相同，这样的方程就称为第一类型的偶次倒数方程. 这类方程，都可以仿照上面的方法，令 $x+\frac{1}{x}=y$，化成一个关于 y 的 m 次方程. 因此，如果得到的关于 y 的 m 次方程可解的话，那末原方程也就可以解出. 并且求出的根总是每两个根互为倒数.

现在再来解下面的方程:

$$x^5+4x^4+5x^3+5x^2+4x+1=0. \qquad \text{(II)}$$

这个方程的各项系数也同样具有特点：与首末两项等距的两项的系数相同.

根据根的意义，如果令 $x=-1$，方程 (II) 里左边的多项式的值是 0，所以方程(II)有一个根 $x_1=-1$. 做综合除法:

$$\begin{array}{rrrrrr|l} 1 & +4 & +5 & +5 & +4 & +1 & -1 \\ & -1 & -3 & -2 & -3 & -1 & \\ \hline 1 & +3 & +2 & +3 & +1, & 0 & \end{array}$$

得降次方程

$$x^4+3x^3+2x^2+3x+1=0.$$

这是一个第一类型的偶次倒数方程，它已在上面解出，从而求得这个方程的解是:

$$x_1=-1,\quad x_{2,3}=\pm i,\quad x_{4,5}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}.$$

象上面这种类型(II)的方程称为**第一类型的奇次倒数方程**.

一般地说，对于 $2m+1$ 次的方程 $f(x)=0$；如果距首末两项等距的每两项的系数都相同，这样的方程就叫做第一类型的奇次倒数方程. 这

类方程总有1个根是$x=-1$，并且把 $f(x)$ 除以 $x+1$ 以后，总可得出一个次数是$2m$ 的第一类型偶次倒数方程.

例 4. 解方程

$$f(x)=x^5-2x^4-5x^3-5x^2-2x+1=0.$$

【解】

$$\begin{array}{rrrrrr|l} 1 & -2 & -5 & -5 & -2 & +1 & -1 \\ & -1 & +3 & +2 & +3 & -1 & \\ \hline 1 & -3 & -2 & -3 & +1, & 0 & \end{array}$$

$$\therefore \quad f(x)=(x+1)(x^4-3x^2-2x^2-3x+1)=0.$$

由 $x+1=0$，得 $x_1=-1$；

由 $x^4-3x^3-2x^2-3x+1=0$，得

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right)-2=0.$$

令 $x+\dfrac{1}{x}=y$，则 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2-2$，代入，得

$$y^2-3y-4=0.$$

$$\therefore \quad y_1=-1, \; y_2=4.$$

从 $x+\dfrac{1}{x}=-1$，得

$$x^2+x+1=0,$$

$$\therefore \quad x_{2,3}=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2};$$

从 $x+\dfrac{1}{x}=4$，得

$$x^2-4x+1=0,$$

$$\therefore \quad x_{4,5}=2\pm\sqrt{3}.$$

由此，得原方程的5个根是 $-1, 2\pm\sqrt{3}$，$\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$.

*习　题　5·6(3)

解下列方程:

1. $x^4+x^3+2x^2+x+1=0.$
2. $2x^4+7x^3+7x+2=0.$
3 $3x^4-7x^3-7x+3=0.$
4. $2x^5+5x^4-13x^3-13x^2+5x+2=0.$

5. $x^5-3x^4+x^3+x^2-3x+1=0$.

6. $2x^6-x^5-10x^4+13x^3-10x^2-x+2=0$.

[提示：先令 $x+\frac{1}{x}=y$，则 $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$，$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=y^3-3y$，由此导出一个关于 y 的三次方程.]

我们再来解下面这两个方程：

$$x^6+3x^5+x^4-x^2-3x-1=0, \qquad \text{(III)}$$

$$x^5+2x^4-x^3+x^2-2x-1=0. \qquad \text{(IV)}$$

这两个方程都有这样的特点：距首末两项等距的每两项系数互为相反的数.

这样的方程，分别称为**第二类型的偶次倒数方程**和**第二类型的奇次倒数方程**.

容易看出，把 $x=1$ 和 $x=-1$ 代入方程(III)的左边，都能使这个多项式的值是零，所以 $x=\pm1$ 是方程(III)的根. 为了求方程(III)的其他 4 个根，先进行综合除法：

$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
1 & +3 & +1 & +0 & -1 & -3 & -1 & 1 \\
  & +1 & +4 & +5 & +5 & +4 & +1 & \\
\hline
1 & +4 & +5 & +5 & +4 & +1, & 0 & -1 \\
  & -1 & -3 & -2 & -3 & -1 & & \\
\hline
1 & +3 & +2 & +3 & +1, & 0 & &
\end{array}$$

这样，从方程 $x^4+3x^3+2x^2+3x+1=0$，就可求得这四个根是 $\pm i$，$\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

也容易看出，$x=1$ 是方程(IV)的一个根. 做除法：

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
1 & +2 & -1 & +1 & -2 & -1 & 1 \\
  & +1 & +3 & +2 & +3 & +1 & \\
\hline
1 & +3 & +2 & +3 & +1, & 0 &
\end{array}$$

这样，从方程

$$x^4+3x^3+2x^2+3x+1=0$$

同样可求得方程(IV)的另外 4 个根是 $\pm i$，$\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

上面的例子表明：第二类型的偶次倒数方程总有两个根 ±1，第二

类型的奇次倒数方程总有一个根 1. 其他根可由第一类型的偶次倒数方程求出.

正因为这样，通常也把第一类型倒数方程称为**标准型的倒数方程.**

例 5. 解方程 $15x^5+34x^4+15x^3-15x^2-34x-15=0$.

【解】 显然，这个方程有 1 个根是 1. 做除法:

$$\begin{array}{rrrrrr|l} 15 & +34 & +15 & -15 & -34 & -15 & 1 \\ & +15 & +49 & +64 & +49 & +15 & \\ \hline 15 & +49 & +64 & +49 & +15, & 0 & \end{array}$$

令 $15x^4+49x^3+64x^2+49x+15=0$, 两边除以 x^2, 得

$$15\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+49\left(x+\frac{1}{x}\right)+64=0.$$

设 $x+\frac{1}{x}=y$, 则 $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$. 代入，得

$$15y^2+49y+34=0.$$

$$(15y+34)(y+1)=0.$$

$$\therefore\quad y_1=-1,\quad y_2=-\frac{34}{15}.$$

由 $x+\frac{1}{x}=-1$, 得 $x^2+x+1=0$,

$$\therefore\quad x=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}.$$

由 $x+\frac{1}{x}=-\frac{34}{15}$, 得 $15x^2+34x+15=0$, 就是

$$(5x+3)(3x+5)=0,$$

$$\therefore\quad x=-\frac{3}{5}, \text{或} -\frac{5}{3}.$$

由此，得原方程的根是: $1,\ -\frac{3}{5},\ -\frac{5}{3},\ \frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$.

注 这方程有 3 个有理根. 这三个有理根也可用试探方法求出. 然后再解二次方程求出两个虚根. 但，这样做一般来说不及上面这种解法简单.

*习　题　5·6(4)

解下列方程:

1. $2x^5+x^4+x^3-x^2-x-2=0$.

2. $3x^5-10x^4+7x^3-7x^2+10x-3=0$.

3. $6x^6+5x^5-44x^4+44x^2-5x-6=0$.

应用解倒数方程的方法，还可以解根是互为负倒数的一种特殊方程. 例如,解方程

$$x^4-4x^3+x^2+4x+1=0. \tag{1}$$

这个方程距首末两项等距的偶次项的系数相同，而奇次项的系数互为相反数. 根据这个特点,把这个方程的各项重行结合起来,得

$$(x^4+1)-4(x^3-x)+x^2=0. \tag{2}$$

因为 $x\neq 0$, 用 x^2 除方程的两边,得

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-4\left(x-\frac{1}{x}\right)+1=0. \tag{3}$$

令 $x-\dfrac{1}{x}=y$, 那末,就有

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}=y^2+2.$$

代入式(3)，得

$$y^2-4y+3=0. \tag{4}$$

$$\therefore\quad y_1=1,\quad y_2=3.$$

从 $x-\dfrac{1}{x}=1$, 得 $x^2-x-1=0$,

$$\therefore\quad x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2};$$

从 $x-\dfrac{1}{x}=3$, 得 $x^2-3x-1=0$,

$$\therefore\quad x_{3,4}=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}.$$

例 6. 解方程 $2x^6-11x^5+12x^4+13x^3-12x^2-11x-2=0$.

【解】 首先,把与首末两项等距的两项结合在一起,得

$$2(x^6-1)-11(x^5+x)+12(x^4-x^2)+13x^3=0.$$

因为 $x\neq 0$, 用 x^3 除方程的两边,得

$$2\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)-11\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+12\left(x-\frac{1}{x}\right)+13=0.$$

设 $y=x-\frac{1}{x}$，则 $y^2+2=x^2+\frac{1}{x^2}$. 而 $y^3=x^3-3x+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}$，所以 $x^3-\frac{1}{x^3}=y^3+3y$. 由此可得

$$2(y^3+3y)-11(y^2+2)+12y+13=0,$$

即

$$2y^3-11y^2+18y-9=0.$$

应用确定有理数根的方法，可求得上述方程的根

$$y_1=1,\quad y_2=3,\quad y_3=\frac{3}{2}.$$

从而得

$$x-\frac{1}{x}=1,\quad x-\frac{1}{x}=3,\quad 或\quad x-\frac{1}{x}=\frac{3}{2}.$$

解上面三个方程，可得原方程的六个根是

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2},\quad x_{3,4}=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2},\quad x_5=2,\quad x_6=-\frac{1}{2}.$$

*习 题 5·6(5)

解下列方程：

1. $4x^4-12x^3+x^2+12x+4=0$.
2. $x^4-3x^3+3x+1=0$.
3. $2x^4+7x^3+2x^2-7x+2=0$.
4. $2x^6+9x^5+7x^4-12x^3-7x^2+9x-2=0$.

本 章 提 要

1. 多项式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 的一些重要性质

(1) 余数定理：$f(x)$除以 $x-a$ 的余数是 $f(a)$.

余数定理的推论：$f(x)$能被 $x-a$ 整除的充要条件是 $f(a)=0$.

(2) 标准分解式

$$f(x)=a_0(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdots(x-\alpha_j)^{k_j}$$

（这里 $k_1, k_2, \cdots, k_j$ 是自然数，$k_1+k_2+\cdots+k_j=n$）.

(3) 两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 恒等的充要条件是：同次项系数相等。

2．一元 n 次方程

(1) 标准形式：$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ (n 是自然数，$a_0, a_1, \cdots, a_n$ 是复数，且 $a_0\neq 0$)．

(2) 根的个数定理：有、并且只有 n 个根．

(3) 重根的判别：$f(x)$ 能被 $(x-\alpha)^k$ 整除，而不能被 $(x-\alpha)^{k+1}$ 整除，则 α 是 k 重根．

(4) 根与系数的关系：

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=-\frac{a_1}{a_0},$$

$$x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n=\frac{a_2}{a_0},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_1x_2\cdots x_n=(-1)^n\frac{a_n}{a_0}.$$

3．实系数一元 n 次方程

(1) 标准形式：$f(x)=0$ ($a_0, a_1, \cdots, a_n$ 都是实数，$a_0\neq 0$)．

(2) 虚根成对定理：如果 $a+bi$ 是其根，则 $a-bi$ 必也是其根 (a, b 是实数，$b\neq 0$)．

4．有理系数一元 n 次方程

(1) 标准形式：$f(x)=0$ ($a_0, a_1, \cdots, a_n$ 都是有理数，$a_0\neq 0$)．

特例：整系数一元 n 次方程 $g(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n=0$ (b_0, $b_1, \cdots, b_n$ 都是整数，$b_0\neq 0$)．

(2) 有理根的求法：

(i) 先化成整系数方程 $g(x)=0$；

(ii) 如果 $f(x)=0$ 有有理根 $x=\dfrac{p}{q}$，p 必为 b_n 的约数，q 必为 b_0 的约数．由此，可用试探方法，把有理根逐一找出．

(3) 关于无理根和虚根的定理：

(i) 如果 $a+\sqrt{b}$ 是它的根，则 $a-\sqrt{b}$ 必也是它的根；

(ii) 如果 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 是它的根，则

$$\sqrt{a}-\sqrt{b},\quad -\sqrt{a}+\sqrt{b},\quad -\sqrt{a}-\sqrt{b}$$

必都是它的根；

(iii) 如果 $\sqrt{a}+\sqrt{b}\,i$ 是它的根，则

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}\,i,\quad -\sqrt{a}+\sqrt{b}\,i,\quad -\sqrt{a}-\sqrt{b}\,i$$

必都是它的根．

（a, b 是有理数，$\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$ 是无理数．）

5．几种特殊类型的高次方程的解法

(1) 二项方程：$a_0x^n+a_n=0$ $(a_0\neq 0)$．

(i) 一般方法：$x^n=-\dfrac{a_n}{a_0}$，$x=\sqrt[n]{-\dfrac{a_n}{a_0}}$．

(ii) 因式分解法：适用于 n 等于 3, 4, 6 时．

(2) 三项方程：$ax^{2n}+bx^n+c=0$ $(a\neq 0)$．

解法：先令 $x^n=y$，得 $ay^2+by+c=0$；求出根 y_1, y_2，再解二项方程 $x^n=y_1$ 和 $x^n=y_2$．

*(3) 倒数方程

(i) 标准型倒数方程

$$a_0(x^{2m}+1)+a_1(x^{2m-1}+x)+\cdots+a_{m-1}(x^{m+1}+x^{m-1})=0.$$

解法：两边除以 x^m，再令 $x+\dfrac{1}{x}=y$，导出一个关于 y 的 m 次方程，解得 y 后再求出 x．

(ii) 其他类型的倒数方程

解法：必定具有根 1 或 -1；把根 1 或 -1 除去后，就可导出一个标准型倒数方程，再用解标准型倒数方程的方法来解．

复 习 题 五

1．用综合除法求商和余数

(1) $(3x^3-4x^2+7x-14)\div(3x-1)$；

(2) $(2x^4+3x^3+4x^2+11)\div(2x+3)$．

2．已知 $f(x)=x^5-12x^4+15x-7$，

(1) 求 $f(x)$ 除以 $x-1$ 的余数；

(2) 求 $f(6)$．

3．(1) 已知多项式 $6x^3-19x^2+ax+b$ 能被 $3x+1$ 整除，也能被 $2x+3$ 整除，求 a 和 b 的值；

(2) 已知多项式 $ax^3+bx^2-47x-15$ 能被 $6x^2-7x-3$ 整除，求 a 和 b 的值；

(3) 已知多项式 ax^4+bx^3+1 能被 $(x-1)^2$ 整除，求 a 和 b 的值；

(4) 已知多项式 $x^4+4x^3+6ax^2+4bx+c$ 能被 x^3+3x^2+9x+3 整除，求 a, b 和 c 的值.

4. (1) 已知 n 次 $(n>2)$ 多项式 $f(x)$ 除以 $x-1$ 的余数是 -1，除以 $x+2$ 的余数是 2，求 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x+2)$ 的余式.

[提示：令 $f(x)=(x-1)(x+2)Q(x)+px+q$.]

(2) 求证：当 $a\neq b$ 时，多项式 $f(x)$ 除以 $(x-a)(x-b)$，所得的余式是 $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}x+\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}$.

5. (1) 求证：如果使多项式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$

的值等于零的 x 的值多于 n 个，那末 $f(x)$ 必恒等于零；

(2) 求证

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=1$$

是一个恒等式.

6. (1) 已知方程 $x^3+9x^2+kx+21=0$ 的三个根成等差数列，求 k 的值，并解这个方程；

(2) 已知方程 $x^3-7x+k=0$ 的一根为另一根的 2 倍，求 k 的值，并解这个方程；

(3) 已知方程 $x^4-13x^3+56x^2+kx+48=0$ 的两个根的比是 2:3，余两个根的差是 1，求 k 的值，并解这个方程.

7. (1) 求证：如果方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根互为倒数，这个方程可变形成 $x^2+px+1=0$ 的形式；

(2) 已知方程 $2x^4-13x^3+26x^2-21x+4=0$ 有两个根互为倒数，解这个方程.

[提示：(2)可设

$$2x^4-13x^3+26x^2-21x+4=(x^2+px+1)(2x^2+qx+4),$$

确定 p, q 的值后，再解两个降次方程.]

8. 已知方程 $x^3-2x^2+5x-3=0$ 的三个根是 α, β, γ，求：

(1) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$;　　　　(2) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$.

9. 已知方程 $x^3-2x^2+3x-1=0$ 的三个根是 α, β, γ，求作一个三次方程，使它的三个根是：

(1) $\frac{2}{\alpha}$, $\frac{2}{\beta}$, $\frac{2}{\gamma}$;　　　　(2) $\frac{\alpha}{\beta\gamma}$, $\frac{\beta}{\gamma\alpha}$, $\frac{\gamma}{\alpha\beta}$.

10. (1) 已知方程 $x^4+4x^3+6x^2+4x+5=0$ 有一个根是 $-i$, 解这个方程;

(2) 已知方程 $x^3-(1-i)x^2+(1-i)x+i=0$ 有一个根是 $-i$, 解这个方程.

11. (1) 已知方程 $6x^4-13x^3-35x^2-x+3=0$ 有一个根是 $2-\sqrt{3}$, 解这个方程;

(2) 已知方程 $x^3-(4+\sqrt{3})x^2+(5+4\sqrt{3})x-5\sqrt{3}=0$ 有一个根是 $\sqrt{3}$, 解这个方程.

12. 已知 $2+3i$, $\sqrt{2}$ 和 -3 都是方程 $f(x)=0$ 的根,

(1) 如果只要求这个方程的次数最低, 这个方程是什么?

(2) 如果既要求次数最低, 且要求各项系数是实数, 这个方程是什么?

(3) 如果既要求次数最低, 且要求各项系数是有理数, 这个方程是什么?

13. 求下列方程的有理根:

(1) $4x^3-4x^2-25x+25=0$;

(2) $6x^4+19x^3-7x^2-26x+12=0$;

(3) $24x^5+10x^4-x^3-19x^2-5x+6=0$;

(4) $10x^4-13x^3+15x^2-18x-24=0$.

14. 已知 $f(x)=x^6+2x^5-4x^4-5x^3-6x^2$,

(1) 在有理数范围内分解 $f(x)$ 的因式;

(2) 在复数范围内分解 $f(x)$ 的因式.

*15. 在方程 $x^3+px^2+qx+r=0$ 中,

(1) 已知一根为另一根的相反数, 求证 $pq+r=0$;

(2) 已知三根成等差数列, 求证 $2p^3-9pq+27r=0$.

16. 解下列方程:

(1) $x^6-7x^3-8=0$;

(2) $(x^4+1)^2-15(x^4+1)+50=0$;

(3) $x^5-7x^4+x^3-x^2+7x-1=0$;

(4) $x^6-(2+3i)x^3-2(1-i)=0$.

第六章　二阶和三阶行列式

行列式是代数里重要基础知识之一，它是研究方程组的重要工具. 读者在今后自学解析几何的时候，也要用到关于行列式的知识.

本章将联系一次方程组的研究，学习关于行列式的一些初步知识.

§6·1　二阶行列式与二元一次方程组

在本丛书代数第二册里，曾经讲过：任何一个二元一次方程组，经过变形以后，都可以化成下面的一般形式：

$$
\text{(I)}\quad \begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, & (1)\\ a_2x+b_2y=c_2. & (2)\end{cases}
$$

当 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ 时，方程组有唯一的解：

$$
\text{(II)}\quad \begin{cases} x=\dfrac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \\[2ex] y=\dfrac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}. \end{cases}
$$

这组解可以作为公式来应用. 为了便于记忆，现在引进一个新的符号来表示它.

把四个数 a, b, c, d 排成

$$
\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix},
$$

用它来表示左上角和右下角的两个数的积 ad 减去左下角和

右上角的两个数的积 bc 的差，就是

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad-bc.$$

式子 $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ 称为**二阶行列式**．它含有两个行（横排称作行）和两个列（竖排称作列）．a, b, c, d 这四个数，称为这个行列式的**元素**，$ad-bc$ 称为这个二阶行列式的**展开式**①．

例 1．展开下面的行列式：

(1) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$；　(3) $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$．

【解】 (1) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$

(2) $\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1.$

(3) $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1.$

从例 1 求出的结果可以看出，应用二阶行列式，方程组(I)的解就可以写成

$$\begin{cases} x = \dfrac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \\[3ex] y = \dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

① 在高等代数里，也直接把 $ad-bc$ 称作是 a, b, c, d 这四个元素所组成的二阶行列式．本书中为了避免混淆，把“行列式”与“行列式的展开式”这两词区分了开来．

为了简便起见，用 D, D_x, D_y 分别表示例 1 中 (1), (2), (3) 的行列式，于是方程组(I)的解就可以写成

$$\begin{cases} x=\dfrac{D_x}{D}, \\ y=\dfrac{D_y}{D} \end{cases} \qquad (D\neq 0).$$

仔细考察一下，行列式 D, D_x, D_y 里的元素，与方程组(I)里 x, y 的系数以及常数项间的关系，可以发现一个重要的规律：

1. 把方程(1)，(2)里 x 和 y 的系数顺次写成

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

就得到行列式 D; 这个行列式称为方程组(I)的**系数行列式**.

2. 把方程(1)和(2)里等号右边的常数项 c_1 和 c_2, 顺次代替行列式 D 里 x 的系数 a_1 和 a_2, 就得到行列式 D_x; 代替行列式 D 里 y 的系数 b_1 和 b_2, 就得到行列式 D_y.

应用这个规律，就可以把二元一次方程组的解直接写出.

例 2. 解方程组

$$\begin{cases} 2x-y-11=0, \\ x+3y-18=0. \end{cases}$$

【解】 原方程组就是

$$\begin{cases} 2x-y=11, \\ x+3y=18. \end{cases}$$

令

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=6+1=7,$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 11 & -1 \\ 18 & 3 \end{vmatrix}=33+18=51,$$

$$D_y=\begin{vmatrix}2 & 11\\ 1 & 18\end{vmatrix}=36-11=25.$$

所以，所求的解是

$$\begin{cases}x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{51}{7}=7\dfrac{2}{7},\\[2ex] y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{25}{7}=3\dfrac{4}{7}.\end{cases}$$

注意 1．应用上面的规律时，首先要把方程组写成一般形式(I)，特别要注意常数项要放在等号右边．

2．因为方程组(I)解的公式中要求 $D\neq 0$，所以解题时宜于先依次求出 D，D_x，D_y，再代公式．

习　题　6·1(1)

1．计算下列行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix}13 & -5\\ -7 & 4\end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix}\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{5}\\[2ex] \dfrac{5}{6} & -\dfrac{1}{3}\end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix}\sin\alpha & -\cos\alpha\\ \cos\alpha & \sin\alpha\end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix}a-b & a^2-ab+b^2\\ a+b & a^2+ab+b^2\end{vmatrix}$．

2．证明：

(1) $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}b_1 & a_1\\ b_2 & a_2\end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix}b_1 & b_1\\ b_2 & b_2\end{vmatrix}=0$；　　(4) $\begin{vmatrix}ka_1 & b_1\\ ka_2 & b_2\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix}a_1+a_1' & b_1\\ a_2+a_2' & b_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_1' & b_1\\ a_2' & b_2\end{vmatrix}$．

从上面证明的结果，你发现二阶行列式有哪些重要性质？

[解法举例：(1) 左边 $=a_1b_2-b_1a_2$，右边 $=a_1b_2-a_2b_1$，$\therefore$ 左边 $=$ 右边．

这说明：二阶行列式中，如把行改为列、列改为行，而不改变它们原

来的次序，行列式的值不变.]

3. 利用二阶行列式解下列关于 x、y 的方程组:

(1) $\begin{cases} 2x+3y+4=0, \\ 5x+6y+7=0; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 4(x+2)=1-5y, \\ 3(y+2)=3-2x; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3x+4y=7a-b, \\ 4x+3y=7a+b; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} ax+by=a^2+b^2, \\ bx+ay=2ab \quad (|a|\neq|b|). \end{cases}$

上面研究的二元一次方程组是系数行列式 D 不等于零的. 现在进一步来研究，当系数行列式 $D=0$ 时，方程组

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, & (1) \\ a_2x+b_2y=c_2 & (2) \end{cases}$$

的解的情况.

首先，考察 a_1, a_2, b_1, b_2 这四个数中至少有一个不是零的情况. 不失去一般性，不妨设 $a_1\neq 0$, 这时从

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-b_1a_2=0$$

可以推得

$$b_2=\frac{a_2}{a_1}b_1.$$

命

$$\frac{a_2}{a_1}=k,$$

就有 $a_2=ka_1$ (k 为常数)，那末

$$b_2=kb_1.$$

这样，方程组(I)就可以变形成:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ ka_1x+kb_1y=c_2. \end{cases}$$

由此可知，

当 $c_2=kc_1$ 时，方程组(I)有无穷多组解;

当 $c_2\neq kc_1$ 时，方程组(I)没有解.

因为，当 $c_2=kc_1$ 时，

$$D_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ kc_1 & kb_1 \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}=0,$$

$$D_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ ka_1 & kc_1 \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}=0,$$

所以，上面的结论可以说成：

对方程组 (I)，当 $D=D_x=D_y=0$ 时有无穷多组解；当 $D=0$，且 D_x 和 D_y 中至少有一个不等于零时没有解.

其次，再来看 a_1, a_2, b_1, b_2 这四个数都是零的情况. 这时，方程组(I)就是

$$\begin{cases} 0x+0y=c_1, \\ 0x+0y=c_2. \end{cases}$$

很明显，当 $c_1=c_2=0$ 时，它有无穷多组解；当 c_1 和 c_2 中至少有一个不是零时，它没有解.

注意 在这种情况下，不管 c_1 和 c_2 是否等于零，D_x 和 D_y 都等于零. 所以，仅仅知道 $D=D_x=D_y=0$ 而没有 a_1, a_2, b_1, b_2 这四个数中至少有一数不是零的条件，不能贸然判定方程组(I)有无穷多组解.

例 3. 解方程组

$$\begin{cases} (2k-1)x-(k+1)y=3k, \\ (4k-1)x-(3k+1)y=5k+4. \end{cases}$$

【解】
$$\begin{aligned} D&=\begin{vmatrix} 2k-1 & -(k+1) \\ 4k-1 & -(3k+1) \end{vmatrix} \\ &=-(2k-1)(3k+1)+(k+1)(4k-1) \\ &=-6k^2+k+1+4k^2+3k-1 \\ &=-2k(k-2). \end{aligned}$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 3k & -(k+1) \\ 5k+4 & -(3k+1) \end{vmatrix}$$
$$=-3k(3k+1)+(k+1)(5k+4)$$
$$=-(4k^2-6k-4)$$
$$=-2(2k+1)(k-2).$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 2k-1 & 3k \\ 4k-1 & 5k+4 \end{vmatrix}$$
$$=(2k-1)(5k+4)-3k(4k-1)$$
$$=-2k^2+6k-4$$
$$=-2(k-1)(k-2).$$

如果 $D\neq0$，也就是 $k\neq0$，$k\neq2$．这时，方程组有唯一的解：

$$\begin{cases} x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{-2(2k+1)(k-2)}{-2k(k-2)}=\dfrac{2k+1}{k}, \\ y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{-2(k-1)(k-2)}{-2k(k-2)}=\dfrac{k-1}{k}. \end{cases}$$

如果 $k=0$．原方程组就是

$$\begin{cases} -x-y=0, \\ -x-y=4. \end{cases}$$

显然，这个方程组无解．

如果 $k=2$．原方程组就是

$$\begin{cases} 3x-3y=6, \\ 7x-7y=14. \end{cases}$$

它可以化成

$$\begin{cases} x-y=2, \\ x-y=2. \end{cases}$$

因此，方程组有无穷多组解．

注　当 $D=0$ 时，如果已知方程组里未知数的 4 个系数中至少有 1 个不是零，那末也可以直接从 D_x 和 D_y 是否都等于 0 而确定方程组有无穷多组解或者无解．例如，本题中，当 $k=0$ 或 2 时，未知数的系数都不是 0；而当 $k=0$ 时，$D_x\neq0$，所以这时方程组无解；当 $k=2$ 时，$D_x=D_y=0$，所以这时方程组有无穷多组解．

习　题　6·1(2)

1．不通过解出方程组,而直接判定下列方程组里哪些有唯一的解？哪些无解？哪些有无穷多组解？

(1) $\begin{cases} x+2y=3, \\ 2x-y=4; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x+2y=1, \\ 2x+4y=2; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x-2y=1, \\ 2x-4y=3; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x-2y=1, \\ y=\dfrac{1}{2}(1-x). \end{cases}$

2．解下列关于 x、y 的方程组,并进行讨论:

(1) $\begin{cases} kx+y=k+1, \\ x+ky=2k; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} (k-1)x+(k+1)y=2(k^2-1), \\ (k^2-1)x+(k^2+1)y=2(k^3-1). \end{cases}$

§6·2　三阶行列式

从§6·1可以看出,用二阶行列式可以简便地写出二元一次方程组的解．类似地，可以应用三阶行列式来简便地写出三元一次方程组

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=k_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=k_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=k_3 \end{cases}$$

的解．本节将先来说明一下三阶行列式的意义．

把九个数 a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 排成下面的形

式：

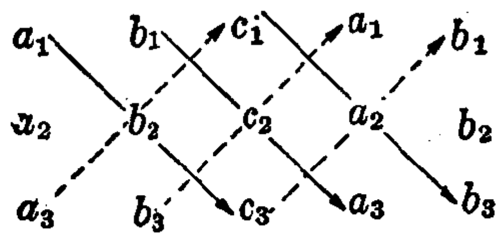
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \tag{1}$$

并且用它来表示式子①

$$(a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2)-(a_3b_2c_1+a_2b_1c_3+a_1b_3c_2). \tag{2}$$

式(1)称为**三阶行列式**，式(2)称为这个三阶行列式的**展开式**.

要写出三阶行列式(1)的展开式(2)，只需在原行列式第三列的旁边顺次把第一列、第二列的元素写出，添成5列，如下图所示：



然后，把每一条实线经过的三个元素的积的和，减去每一条虚线经过的三个元素的积的和．这种写出三阶行列式的展开式的方法，称为**对角线法**.

例1. 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

的值.

---

① 象二元一次方程组一样，式(1)事实上就是方程组(I)的系数行列式；而式(2)的值不等于零就是方程组(I)有唯一解的条件．读者有兴趣的话，可以用普通的方法解方程组(I)来验证.

【解】 $D=(1\times5\times9+2\times6\times7+3\times4\times8)$

$$\begin{aligned}&-(7\times5\times3+8\times6\times1+9\times2\times4)\\&=(45+84+96)-(105+48+72)\\&=225-225=0.\end{aligned}$$

注 行列式的展开式中，每一个项的元素是由不在同一行又不在同一列的元素构成的．例如，在项 $a_1b_2c_3$ 中 a_1，b_2，c_3 分别是第一行第一列，第二行第二列，第三行第三列的元素，它们不处在相同的行或相同的列．写出展开式时应该注意这个特点．

习 题 6·2(1)

1．计算下列行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix}1&-3&4\\2&0&-5\\3&-1&7\end{vmatrix}$．

2．展开下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix}a&c&b\\b&a&c\\c&b&a\end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix}0&x&y\\x&0&z\\y&z&0\end{vmatrix}$．

3．证明

$$\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix}b_2&c_2\\b_3&c_3\end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix}b_1&c_1\\b_3&c_3\end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix}b_1&c_1\\b_2&c_2\end{vmatrix}.$$

4．证明：

(1) $\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}$；

(2) $\begin{vmatrix}b_1&a_1&c_1\\b_2&a_2&c_2\\b_3&a_3&c_3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$;

(4) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & kc_2 \\ a_3 & b_3 & kc_3 \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1+b_1' & c_1 \\ a_2 & b_2+b_2' & c_2 \\ a_3 & b_3+b_3' & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & b_1' & c_1 \\ a_2 & b_2' & c_2 \\ a_3 & b_3' & c_3 \end{vmatrix}$.

[提示：只需把行列式展开，证明等号两边的式子恒等.]

根据习题 6·2(1) 第 4 题证得的结果，可以看出：三阶行列式象二阶行列式一样，具有下面这些重要性质：

1° 把行列式的行改为列，列改为行，而不改变它们原来的次序，则行列式的值不变；

2° 把行列式的相邻两列对调，则行列式的绝对值不变而符号相反；

3° 如果行列式中两列元素完全相同，那末这个行列式的值等于零；

4° 把行列式的某一列的元素同乘以 k，相当于这个行列式乘以 k；

5° 如果行列式的一列的元素都是二项式，那末这个行列式等于把这些二项式各取一项作成相应列而其余各列不变的两个行列式的和.

根据上面提出的性质 1°，容易看出：上面 2°、3°、4°、5° 中所指的关于列的性质，对于行也同样成立.

应用上述性质，有时可使行列式的计算比较简便。

例 2. 计算：

(1) $A=\begin{vmatrix}-6 & 8 & 2\\ 15 & -20 & 5\\ 3 & 4 & -1\end{vmatrix}$;

(2) $B=\begin{vmatrix}-1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5}\end{vmatrix}$.

【解】 (1) $A=2\times5\times\begin{vmatrix}-3 & 4 & 1\\ 3 & -4 & 1\\ 3 & 4 & -1\end{vmatrix}$

$$=2\times5\times3\times4\times\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}$$

$$=120\times(-1+1+1+1+1+1)=480;$$

(2) $B=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}\times\begin{vmatrix}-2 & 3 & 1\\ 2 & -3 & 1\\ 2 & 3 & -1\end{vmatrix}$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}\times2\times3\times\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{4}{5}.$$

例 3. 求证

$$D=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ ka_1 & kb_1 & kc_1\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=0.$$

【证】 $$D=k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad (\text{性质 } 4^\circ)$$

$$=k\times 0 \quad (\text{性质 } 3^\circ)$$

$$=0.$$

从例 3 可以看出，由行列式的性质 4° 和 3°，可以推出行列式还具有下面的性质：

6° 如果行列式的两行（或两列）的对应元素成比例，那末这个行列式的值等于零.

习 题 6·2(2)

1．利用行列式的性质 5° 和 6°，验证行列式还具有下面的性质 7°：

把行列式的某一列（或行）的所有元素乘以同一个数后，加到另一列（或行）的对应元素上，则行列式的值不变.

2．利用行列式的性质，计算下述各行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} 6 & 42 & 27 \\ 8 & -28 & 36 \\ 20 & 35 & 90 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{3}{2} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix}$.

3．不通过展开行列式，证明下列各式的值都等于零：

(1) $\begin{vmatrix} 10 & 8 & 2 \\ 15 & 3 & 12 \\ 21 & 4 & 17 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

[提示：(1)可应用性质 7° 和 6°；(2)可应用性质 1° 和 2°.]

4．计算下列行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} -12 & 13 & 11 \\ -13 & 12 & 13 \\ -11 & 11 & 12 \end{vmatrix}$.

§6·3 子行列式和代数余子式

为了简化行列式的计算，也为了下面研究三元一次方程组的需要，本节将引进关于行列式的两个重要概念——子行列式和代数余子式.

在习题6·2(1)的第3题里，读者曾证明过下面的恒等式:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}. \quad (1)$$

这里可以看到:一个三阶行列式,可以其第一列的元素分别乘以一个相应的二阶行列式，用所得的积的代数和来表示. 仔细考察一下这些二阶行列式与三阶行列式间的关系，还可以看出: a_1, a_2, a_3 所乘上的二阶行列式，正好是三阶行列式里把这个元素所在的行和列的元素全部划去以后所留下来的四个元素(不改变它们的相互位置)所组成的,如下图所示:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

把行列式里某一元素所在的行和列划去后留下来的行列式,称为这个行列式对应于这个元素的**子行列式**(简称**子式**).

如果用 i 和 j 分别表示某一元素所在的行数和列数，这个元素的子式乘以 $(-1)^{i+j}$ 所得的式子，称为这个行列式里对应于这个元素的**代数余子式**.

代数余子式，通常用这个元素的大写字母附以相同的下标来表示. 例如,在行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

里,对应于元素 a_1, a_2, a_3 的代数余子式分别是:

$$A_1=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$A_2=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$A_3=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

应用代数余子式的记号,式(1)就可以简单地表示成

$$D=a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3. \qquad (1')$$

[这里D表示式(1)等号右边的三阶行列式.]

读者可自行验证：三阶行列式还可以表示成以下各种不同的形式:

$$D=b_1B_1+b_2B_2+b_3B_3, \qquad (2)$$

$$D=c_1C_1+c_2C_2+c_3C_3, \qquad (3)$$

$$D=a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1, \qquad (4)$$

$$D=a_2A_2+b_2B_2+c_2C_2, \qquad (5)$$

$$D=a_3A_3+b_3B_3+c_3C_3. \qquad (6)$$

上面的等式(1′)、(2)、(3)，分别称作是把行列式D按照它的第1、2、3列元素展开，等式(4)、(5)、(6)分别称作是把行列式D按照它的第1、2、3行元素展开.

把上面这6个等式概括起来说,就是:

定理 1. 行列式的值，等于任意一行(或一列)的各元素

乘以对应于它们的代数余子式的积的和.

应用这个定理,有时可简化行列式的计算.

例 计算下列行列式的值:

(1) $\begin{vmatrix}3 & 0 & 8\\5 & 2 & 17\\7 & 0 & 25\end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix}3 & 0 & 8\\0 & -1 & 1\\4 & 5 & 0\end{vmatrix}$.

【解】 (1) 按第二列元素展开,得

$$原式=2\begin{vmatrix}3 & 8\\7 & 25\end{vmatrix}=2(75-56)=38.$$

(2) 先把第3列元素加到第2列的对应元素上,这样,第2行就有两个元素是零,再按这一行元素展开,得

$$原式=\begin{vmatrix}3 & 8 & 8\\0 & 0 & 1\\4 & 5 & 0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}3 & 8\\4 & 5\end{vmatrix}=-(15-32)=17.$$

对于行列式的代数余子式,还有下面所述的性质:

定理2. 行列式某一列(或行)的各元素与另一列(或行)对应元素的代数余子式的积之和恒等于零.

这也就是说,对于行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\\a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix},$$

以下的等式都成立:

$a_1B_1+a_2B_2+a_3B_3=0$; $a_1A_2+b_1B_2+c_1C_2=0$;

$a_1C_1+a_2C_2+a_3C_3=0$; $a_1A_3+b_1B_3+c_1C_3=0$;

$b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3=0$; $a_2A_1+b_2B_1+c_2C_1=0$;

$b_1C_1+b_2C_2+b_3C_3=0$; $a_2A_3+b_2B_3+c_2C_3=0$;

$c_1A_1+c_2A_2+c_3A_3=0$; $a_3A_1+b_3B_1+c_3C_1=0$;

$c_1B_1+c_2B_2+c_3B_3=0$; $a_3A_2+b_3B_2+c_3C_2=0$.

这些等式的证法完全一样. 例如，下面来证明其中第一个等式.

【证】 在行列式D中，把第二列的元素b_1, b_2, b_3换成第一列的元素a_1, a_2, a_3，得行列式

$$D'=\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

把D'按第二列的元素展开，因为这列元素的代数余子式就是行列式D中第二列的各元素b_1, b_2, b_3的代数余子式B_1, B_2, B_3，所以，根据定理1，有

$$D'=a_1B_1+a_2B_2+a_3B_3. \tag{7}$$

令D'中有两列元素完全相同，根据行列式性质3，

$$D'=0. \tag{8}$$

由式(7)和式(8)，即得

$$a_1B_1+a_2B_2+a_3B_3=0.$$

注　对这些等式，也可以把各代数余子式展开后代入左边，再进行化简而得到证明，但不如上面的证法简单.

习　题　6·3

1. 在行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

中，元素a_i, b_i, c_i的代数余子式分别是A_i, B_i, $C_i(i=1, 2, 3)$，求证：

(1) $a_2A_1+b_2B_1+c_2C_1=0$;

(2) $c_1A_1+c_2A_2+c_3A_3=0$.

2. 利用代数余子式，计算下列各行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} 7 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 5 & 36 & 7 \end{vmatrix}$.

3．先应用行列式的性质，把某一列(或行)的元素化成有两个为 0，再应用代数余子式来进行计算．用此方法，试计算下列各行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 7 & -5 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix}$.

4．计算下列各行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} 15 & -25 & 5 \\ -25 & 15 & 5 \\ 5 & -25 & 15 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & -4 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$.

§6·4 三元一次方程组

有了上面的基础，现在就可以利用三阶行列式来研究三元一次方程组

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=k_1, & (1) \\ a_2x+b_2y+c_2z=k_2, & (2) \\ a_3x+b_3y+c_3z=k_3 & (3) \end{cases}$$

的解法．

首先，应用代数余子式和它的性质，设法从这三个方程里消去 y 和 z，导出一个只含有未知数 x 的方程．

行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

中，分别记元素 a_i, b_i, c_i 的代数余子式为

$$A_i,\ B_i,\ C_i \quad (i=1,\ 2,\ 3).$$

把 A_1, A_2, A_3 分别乘式(1)，(2)，(3)的两边，得

$$a_1A_1x+b_1A_1y+c_1A_1z=k_1A_1, \tag{4}$$

$$a_2A_2x+b_2A_2y+c_2A_2z=k_2A_2, \tag{5}$$

$$a_3A_3x+b_3A_3y+c_3A_3z=k_3A_3. \tag{6}$$

把式(4)，(5)，(6)的等号两边分别相加，并应用上节的定理1和2，得

$$Dx=k_1A_1+k_2A_2+k_3A_3. \tag{7}$$

类似地，从式(1)，(2)，(3)中消去 x 和 z，或者 x 和 y，可以导出只含有未知数 y，或者 z 的方程：

$$Dy=k_1B_1+k_2B_2+k_3B_3, \tag{8}$$

$$Dz=k_1C_1+k_2C_2+k_3C_3. \tag{9}$$

为了简便起见，分别用记号 D_x, D_y, D_z 来表示(7)，(8)，(9)中等号右边的式子，就是

$$D_x=k_1A_1+k_2A_2+k_3A_3=\begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$D_y=k_1B_1+k_2B_2+k_3B_3=\begin{vmatrix} a_1 & k_1 & c_1 \\ a_2 & k_2 & c_2 \\ a_3 & k_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$D_z=k_1C_1+k_2C_2+k_3C_3=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & k_2 \\ a_3 & b_3 & k_3 \end{vmatrix}.$$

这就导出了一个方程组

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} Dx=D_x, \\ Dy=D_y, \\ Dz=D_z. \end{cases}$$

下面将分成三种情况来研究.

情况一　$D\neq 0$. 这时，方程组(II)有唯一的解

$$\begin{cases} x=\dfrac{D_x}{D}, \\ y=\dfrac{D_y}{D}, \\ z=\dfrac{D_z}{D}. \end{cases}$$

我们来看一下，这组解是否是方程组(I)的解. 为此，通过检验①，例如，把这组解代入式(1)的左边，得

$$\begin{aligned} &a_1\frac{D_x}{D}+b_1\frac{D_y}{D}+c_1\frac{D_z}{D} \\ &=\frac{1}{D}(a_1D_x+b_1D_y+c_1D_z) \\ &=\frac{1}{D}[a_1(k_1A_1+k_2A_2+k_3A_3)+b_1(k_1B_1+k_2B_2+k_3B_3) \\ &\qquad +c_1(k_1C_1+k_2C_2+k_3C_3)] \\ &=\frac{1}{D}[k_1(a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1)+k_2(a_1A_2+b_1B_2+c_1C_2) \\ &\qquad +k_3(a_1A_3+b_1B_3+c_1C_3)] \\ &=\frac{1}{D}\cdot k_1D=k_1. \end{aligned}$$

所以，这组解适合方程(1)；类似地，读者可以自己验证这组解也适合方程(2)和(3). 所以，这组解也就是方程组(I)的解.

情况二　$D=0$，但 D_x，D_y，D_z 中至少有一个不等于零. 这时，方程组(II)无解，方程组(I)当然也无解.

---

① 因为，从方程组(I)导出方程组(II)时，没有附加 $A_1\neq 0$, $B_1\neq 0$, $C_1\neq 0$ 的条件，只能肯定方程组(I)的解都是方程组(II)的解，但不能保证方程组(II)的解都是方程组(I)的解，所以还必须通过检验这个步骤.

情况三　$D=D_x=D_y=D_z=0$. 这时，方程组(II)有无穷多组解，但方程组(I)可能有无穷多解，也可能无解①.

例如，在方程组

$$\begin{cases} x-y+2z=2, \\ 2x-2y+4z=3, \\ 3x-3y+6z=6 \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} x-y+2z=2, \\ 2x-2y+4z=4, \\ 3x-3y+6z=6 \end{cases}$$

里，都有 $D=D_x=D_y=D_z=0$, 但是，前面这个方程组无解，而后面这个方程组有无穷多解.

例 1. 解方程组

$$\begin{cases} x+2y-4z=11, \\ 2x-3y\qquad=2, \\ \qquad y-4z=1. \end{cases}$$

【解】 $$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix}=12-8+16=20.$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 11 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}=132-8-12+16=128,$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 1 & 11 & -4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix}=-8-8+88=72,$$

$$D_z=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 11 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-3+22-4-2=13.$$

所以，所求的解是

① 这种情况的详细研究比较复杂，本书中把它略去了。

$$\begin{cases} x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{128}{20}=6\dfrac{2}{5}, \\ y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{72}{20}=3\dfrac{3}{5}, \\ z=\dfrac{D_z}{D}=\dfrac{13}{20}. \end{cases}$$

习　题　6·4(1)

1．应用三阶行列式，解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 2x-3y+z+1=0, \\ x+y+z=6, \\ 3x+y-2z=-1; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x+2y+3z=6, \\ 2x+4y-7=z, \\ 3x+2y+9z-14=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x+y=5, \\ x-3z=-14, \\ 5y-z=10; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x-y+z=a, \\ x+y-z=b, \\ -x+y+z=c. \end{cases}$

（a, b, c 是已知常数.）

2．应用三阶行列式，确定下列方程组的解的情况：

(1) $\begin{cases} x+y-z=5, \\ 3x+y+z=2, \\ 5x+5y-5z=25; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x+y-z=1, \\ 3x+y+2z=-3, \\ 10x+4y+2z=4; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x-y+3z=2, \\ 4x-2y+6z=6, \\ 6x-3y+9z=6; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 2x-y+3z=1, \\ 4x-2y+6z=3, \\ 7x-y+z=0; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x-y-z=0, \\ 2x+y-3z=3, \\ 3x-4z=3; \end{cases}$　　(6) $\begin{cases} x-y+z=1, \\ 2x-2y+2z=2, \\ -3x+3y-3z=-3. \end{cases}$

最后，再来研究一类特殊的三元一次方程组

$$\text{(III)}\quad \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z=0, \\ a_3x+b_3y+c_3z=0. \end{cases}$$

在这个方程组里，各个方程的常数项都等于零，含有未知数的项都是一次项．这个方程组通常称为**三元齐次线性方程组**．

很明显，三元齐次线性方程组都有一组解

$$\begin{cases} x=0, \\ y=0, \\ z=0. \end{cases}$$

这组解称为三元齐次线性方程组的**零解**．

现在的问题是三元齐次线性方程组是不是还可能有其他不是零的解(即**非零解**)？

因为方程组(III)就是方程组(I)当 $k_1=k_2=k_3=0$ 时的一个特例，所以上面得到的结论应该成立．这样，就可以知道：

当系数行列式 $D\neq 0$ 时，方程组(III)有唯一的解，这组解就是 $x=y=z=0$．

当系数行列式 $D=0$ 时，方程组(III)或是无解，或是有无穷多解．但是，既已知方程组(III)有一组解 $x=y=z=0$，所以这时方程组(III)有无穷多组解．

由此，可以得到结论：

定理1．三元齐次线性方程组有非零解的充要条件是它的系数行列式 $D=0$．

例2．已知方程组(III)有非零解，求证

$$\begin{cases} x=kA_1, \\ y=kB_1, \quad (k\text{ 是任意常数}) \\ z=kC_1 \end{cases}$$

是这个方程组的解．

【证】 因为方程组(III)有非零解，所以 $D=0$．因此有

$$\begin{aligned} a_1(kA_1)+b_1(kB_1)+c_1(kC_1) &= k(a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1) \\ &= kD=0, \end{aligned}$$

$$a_2(kA_1)+b_2(kB_1)+c_2(kC_1)=k(a_2A_1+b_2B_1+c_2C_1)=0,$$
$$a_3(kA_1)+b_3(kB_1)+c_3(kC_1)=k(a_3A_1+b_3B_1+c_3C_1)=0.$$
所以 $x=kA_1$, $y=kB_1$, $z=kC_1$ (k 是任意常数)是方程组(III)的解.

注 同样,可以证明:

$$\begin{cases} x=k'A_2, \\ y=k'B_2, \\ z=k'C_2 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} x=k''A_3, \\ y=k''B_3, \\ z=k''C_3 \end{cases}$$

也是方程组(III)的解. 在 A_i, B_i, C_i $(i=1, 2, 3)$ 不全为零时,方程组(III)的非零解就可以用上面的一组解一般地表示出来.

例 3. 解下列方程组:

$$(1)\ \begin{cases} 4x-3y+5z=0, \\ 3x+\ y-2z=0, \\ x-4y-3z=0; \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} x-y+z=0, \\ x+y-z=0, \\ 5x+y-z=0. \end{cases}$$

【解】

(1) $\because$ $$D=\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & -3 \end{vmatrix}$$
$$=4\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & -3 \end{vmatrix}-3\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -4 & -3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$
$$=-44-87+1$$
$$=-130\neq 0,$$

所以,原方程组有唯一的一组解:

$$x=0, \quad y=0, \quad z=0.$$

(2) $\because$ $$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}=0;$$

$$A_1=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=0,\qquad B_1=-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 5 & -1\end{vmatrix}=-4,$$

$$C_1=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 5 & 1\end{vmatrix}=-4.$$

所以，这个方程组有无穷多组解：

$$\begin{cases}x=0,\\ y=-4k,\\ z=-4k\end{cases}\quad (\text{这里 } k \text{ 为任意常数}).$$

注　本题的解的过程中，如果计算代数余子式 A_2, B_2, C_2，可得

$$A_2=0,\quad B_2=-6,\quad C_2=-6.$$

由此得方程组的解是

$$\begin{cases}x=0,\\ y=-6k,\\ z=-6k.\end{cases}$$

很明显，这与上面所求得的解事实上是一样的．如果在前面这组解里命 $-4k=m$，后面这组解里命 $-6k=m$，那末它们都变成了

$$\begin{cases}x=0,\\ y=m,\\ z=m\end{cases}\quad (m\text{ 为任意常数})$$

的形式．因此，便可把前后任一组解作为方程组的解的一般形式．

习　题　6·4(2)

1．解下列各方程组：

(1) $\begin{cases}x+y+z=0,\\ 2x+3y+2z=0,\\ 4x+5y+4z=0;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x+5y-10z=0,\\ 2x-3y+6z=0,\\ 3x+2y-4z=0;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x-2y+z=0,\\ x+2y-z=0,\\ 5x+2y-z=0;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}6x-y-7z=0,\\ 5x+10y+5z=0,\\ 4x-3y-7z=0.\end{cases}$

2．证明下面这些方程组都没有非零解：

(1) $\begin{cases} x+y+2z=0, \\ 2x+y+z=0, \\ x+2y+z=0; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} -x+2y+2z=0, \\ 2x-y+2z=0, \\ 2x+2y-z=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x+z=0, \\ x-4y-z=0, \\ -x+8y+3z=0; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 4x-2y+4z=0, \\ 10x+2y+12z=0, \\ x+2y+2z=0. \end{cases}$

本 章 提 要

1．二阶行列式与三阶行列式的展开法则

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2) - (a_3b_2c_1 + a_2b_1c_3 + a_1b_3c_2).$$

2．行列式的性质

(1) 把行列式的行与列对调后，不改变它的值．

(2) 把行列式的相邻两列（或两行）对调后，它的绝对值不变而符号相反．

(3) 如果行列式中有两列（或两行）的元素依次相同，那末这行列式的值等于零．

(4) 如果用数 k 乘行列式的某一列（或某一行）中的所有元素，所得行列式的值即等于原行列式的值乘以 k．

(5) 含有两个成比例的列（或行）的行列式，其值等于零．

(6) 如果行列式的某一列（或某一行）可以表为两项的和的形式，那末这行列式可变形为两个行列式的和．

(7) 如果在行列式中把某一列（或行）的元素加上另一列（或行）的对应元素的 k 倍，那末此行列式的值不改变．

(8) 行列式的值，等于它的任一列（或行）中所有的元素和它对应的代数余子式的乘积的和．

(9) 行列式的某一列(或行)的各元素与另一列(或行)对应元素的代数余子式的积的和恒等于零.

3. 一次方程组的解

(1) 二元一次方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases}$$

设 $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $D_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $D_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$.

1° 如果 $D\neq0$, 方程组有唯一组解:

$$x=\frac{D_x}{D}, \qquad y=\frac{D_y}{D}.$$

2° 如果 $D=0$, 而未知数的系数不全为零,那末:

当 $D_x\neq0(D_y\neq0)$ 时,方程组无解;

当 $D_x=D_y=0$ 时,方程组有无穷多组解.

(2) 三元一次方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=k_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=k_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=k_3. \end{cases}$$

设 $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $D_x=\begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$,

$D_y=\begin{vmatrix} a_1 & k_1 & c_1 \\ a_2 & k_2 & c_2 \\ a_3 & k_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $D_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & k_2 \\ a_3 & b_3 & k_3 \end{vmatrix}$.

1° 如果 $D\neq0$, 方程组有唯一组解:

$$x=\frac{D_x}{D}, \quad y=\frac{D_y}{D}, \quad z=\frac{D_z}{D}.$$

2° 如果 $D=0$, 而 D_x, D_y, D_z 至少有一个不等于零,方程组无解.

3° 如果 $D=0$, 且 $D_x=D_y=D_z=0$ 时, 方程组有无穷多组解, 或无解.

(3) 三元齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z=0, \\ a_3x+b_3y+c_3z=0. \end{cases}$$

设
$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

1° 如果 $D\neq 0$，方程组有唯一组解:

$$x=0,\quad y=0,\quad z=0\quad \text{（称为零解）}.$$

2° 如果 $D=0$，方程组有无穷多组解:

$$\begin{cases} x=kA_i, \\ y=kB_i, \\ z=kC_i, \end{cases}$$

这里 k 为任意常数，A_i，B_i，C_i 不全为零($i=1, 2, 3$)。

复 习 题 六

1．解下列方程组:

(1) $\begin{cases} 3x+5y=13, \\ 2x+7y=81; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3x+4y-2=0, \\ 2x+3y-7=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x+2y+3z=6, \\ 2x+4y+z=7, \\ 3x+2y+9z=14; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} 2x+z=5, \\ x+3y=10, \\ 5y-z=10. \end{cases}$

2．不通过解方程组的方法，试确定下列方程组是无解还是有无穷多组解:

(1) $\begin{cases} 3x+5y=4, \\ 6x+10y=2; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3x-5y=4, \\ 9x-15y=12; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3x+4y=1, \\ 6x+8y=3; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} 3x+4y=1, \\ 6x+8y=2; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} 2x-3y+z=-2, \\ x-2y+3z=-1, \\ x-y-2z=3; \end{cases}$ (6) $\begin{cases} 2x+4y-2z=8, \\ 3x-y+2z=-1, \\ 11x+y+4z=0; \end{cases}$

(7) $\begin{cases} x+2y-z=-3, \\ 2x-y+3z=3, \\ 8x+y+7z=3; \end{cases}$

(8) $\begin{cases} 3x-6y+3z=\dfrac{3}{2}, \\ x-2y+z=\dfrac{1}{2}, \\ -2x+4y-2z=-1. \end{cases}$

3．计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & -3 \end{vmatrix}$；

(2) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$；

(4) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$；

(6) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$.

4．计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} a+b & a & b \\ a & c+a & c \\ b & c & c+b \end{vmatrix}$；

(2) $\begin{vmatrix} a+2b & a+4b & a+6b \\ a+3b & a+5b & a+7b \\ a+4b & a+6b & a+8b \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} b+c & a-c & a-b \\ b-c & c+a & b-a \\ c-b & c-a & a+b \end{vmatrix}$.

5．证明下列各式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2-bc \\ 1 & b & b^2-ca \\ 1 & c & c^2-ab \end{vmatrix}=0$；

(2) $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b'+c' & c'+a' & a'+b' \\ b''+c'' & c''+a'' & a''+b'' \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 2a & 3a+2b & 4a+3b+2c \\ 3a & 6a+3b & 10a+9b+3c \end{vmatrix}=a^3+3a^2b$；

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ ax & ay & az \\ a^2+x^2 & a^2+y^2 & a^2+z^2 \end{vmatrix} = a(x-y)(y-z)(z-x)$.

6．解下列方程中的 x:

(1) $\begin{vmatrix} x^2-1 & 2 & 3 \\ x & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$;　　(2) $\begin{vmatrix} x & 2x & 9 \\ 3 & 5 & 10 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 0$;

(3) $\begin{vmatrix} 15-2x & 11 & 10 \\ 11-3x & 17 & 16 \\ 7-x & 14 & 13 \end{vmatrix} = 0$.

7．解下列方程组:

(1) $\begin{cases} x-3y+4z=0, \\ 2x-5z=0, \\ 3x-y+7z=0; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 10x+8y+2z=0, \\ 15x+3y+12z=0, \\ 21x+4y+17z=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3x+3y+4z=0, \\ 2x+5y+4z=0, \\ 2x+3y+7z=0; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} -\dfrac{1}{2}x+\dfrac{2}{3}y-z=0, \\ \dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}y+z=0, \\ \dfrac{1}{5}y+2z=0; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x+ay+(b+c)z=0, \\ x+by+(c+a)z=0, \\ x+cy+(a+b)z=0 \end{cases}$　(a, b, c 为已知常数);

(6) $\begin{cases} x+2z=0, \\ y+2z=0, \\ x-y=0. \end{cases}$

8．k 为何值时，下列方程组有非零解:

$$\begin{cases} 4x+3y+z=kx, \\ 3x-4y+7z=ky, \\ x+7y-6z=kz. \end{cases}$$

总 复 习 题

1．(1) 怎样判断一个问题里所指的是相异元素的排列，还是组合？

(2) 在一条铁路线上，从起点站到终点站，共有10个大站．铁路局要为这些车站总共准备多少种客票？这些客票里票价不同的最多有几种？

2．(1) m 个不同元素中取 n 个不同元素的排列种数与组合种数间，存在怎样的关系？

(2) 在 n 是什么值时有 $A_m^n = C_m^n$？

(3) 在什么时候有 $A_m^n = 24C_m^n$？

(4) 有没有这样的 n，能使等式 $A_m^n = 10C_m^n$ 成立？为什么？

3．求下列各式中的 x:

(1) $C_{16}^{2x+1} = C_{16}^{x+2}$；　　　　(2) $xP_3 = 4C_x^{x-2}$；

*(3) $C_{2x}^{x-1} : C_{2(x-1)}^{x} = 132 : 35$. $\left[\text{提示：应用 } C_m^n = \dfrac{m!}{(m-n)!\,n!}.\right]$

*4．(1) 解方程组

$$\begin{cases} C_x^y = C_x^{2y}, \\ 3C_x^{y+1} = 11C_x^{y-1}; \end{cases}$$

(2) 已知在 m 个不同元素中取 $n-1$ 个、n 个、$n+1$ 个不同元素所有组合的种数，顺次成比 $2:3:4$，求 m 和 n．

5．证明：

(1) $nC_m^n = mC_{m-1}^{n-1}$；　　　　(2) $A_{m+1}^n = A_m^n + nA_m^{n-1}$．

并且说明这两个等式的具体意义．

6．把 a, b, c, d, e 这五个字母排成一排，问

(1) a 被排在第一个位置，或 b 被排在末一个位置的排法共有几种？

*(2) 在上面的排列中，a 被排在第一个位置且 b 被排在末一个位置的概率是多少？

7．某厂生产一批五个数字的号码锁（每档数字都可以是 0，1，2，…，9 这十个数字的任一个），

(1) 问产品中总共可有多少不同的锁？

*(2) 在上面这批锁中取出一个，随便拨一个号码恰把锁打开的概率是多少？

(3) 在上面这批锁中，奇数号码的锁有几个？偶数号码的锁有几个？

*(4) 在上面这批锁中，要求五个数字都不相同且号码被 25 整除的锁出现的概率是多少？

8．有 8 部机器，分配给甲、乙、丙三个工人管理：

(1) 如果甲管 4 部、乙管 3 部、丙管 1 部，有几种分配方法？

(2) 如果甲管 4 部，其余的二人是一个管 3 部、一个管 1 部，有几种分配方法？

9．某青年突击队有 8 个男队员和 7 个女队员，现考虑从中选出 6 人，组成一个试点小组：

(1) 如果男女各占一半，有多少种选法？

(2) 如果至少有 3 个女队员，有多少种选法？

(3) 如果最多只能有 3 个女队员，有多少种选法？

(4) 如果至少有 3 个女队员并且至少有 2 个男队员，有多少种选法？

[提示：对(2)、(3)、(4)小题，宜用加法原则来解，这样不易出错.]

(5) 如果要选出 4 个男队员和 2 个女队员，分别在试点小组里担任 6 种不同的工作，问有多少种选法？

10．(1) 今有 1 元币、5 元币、10 元币各一张，可以组成多少种不同的币值？

(2) 今有 1 元币 5 张、5 元币 2 张、10 元币 1 张，可以组成多少种不同的币值？

[提示：只须注意，能组成的最小、最大币值是多少？这中间的币值情况怎样.]

(3) 从 1、2、3、4、5、6 这六个数字中，任取两个相减，可以得到多少个不同的差？

[提示：注意一下，能组成的最小、最大的差是什么？这中间的差值的情况怎样.]

11. 设 n 是自然数，用数学归纳法证明：

(1) $\frac{(2n)!}{n!}=2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)$;

(2) $(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)+3(1^5+2^5+3^5+\cdots+n^5)$
$=4(1+2+3+\cdots+n)^3$.

12. 在 $(x+y)^n$ 的展开式里，已知第六项的值是 112、第七项的值是 7、第八项的值是 $\frac{1}{4}$，求 n, x, y (n 为自然数，x、y 为实数).

13. 求证：

(1) 在 $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2n}$ 的展开式里，x^{2r} 的系数是

$$(-1)^{n-r}\frac{(2n)!}{(n-r)!(n+r)!};$$

(2) 在 $(1+x)^{p+q}$ 的展开式里，x^p 的系数与 x^q 的系数相等；

(3) 在 $(1+x)^{n+1}$ 的展开式里，x^{r+1} 与 x^r 的系数的差，与 $(1+x)^n$ 的展开式里，x^{r+1} 与 x^{r-1} 的系数的差相等.

14. 求证

$$C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\cdots+nC_n^n=n\cdot 2^{n-1}.$$

15. 已知

$$z_1=(x+y)+(x^2-xy-2y)i,\quad z_2=(2x-y)-(y-xy)i,$$

这里 x, y 都是实数，试问 x 和 y 取什么值时，

(1) z_1 和 z_2 都是实数？

(2) z_1 和 z_2 都是纯虚数？

(3) z_1 和 z_2 互为共轭复数？

(4) z_1 和 z_2 互为共轭虚数？

16. 设 x, y 为实数，解方程：

(1) $(x-2yi)-(2y-6xi)=(3x+2i)-\left(\frac{2}{3}-2yi\right)$;

(2) $\frac{6x-yi}{5+2i}=\frac{15}{8x+3yi}$.

17. 解下列方程或方程组：

(1) $|z|-z=1+2i$;

(2) $\begin{cases}(2-i)u+(2+i)v=2,\\ uv=2.\end{cases}$

18. 设 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$, 求证:

(1) $(1+\omega-\omega^2)^3-(1-\omega+\omega^2)^3=0$;

(2) $(1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega^4)(1-\omega^4+\omega^8)\cdots(1-\omega^{2^n}+\omega^{4^n})=2^{2n}$

(n 是自然数).

[提示: 利用习题 4·8(1) 第 4 题的结论.]

19. (1) 已知 $f(x)=2x^3+bx^2+cx+d$ 的根是 $\dfrac{1}{2}$、-2、3, 求这个多项式;

(2) 已知 $f(x)=x^4+ax^3+x^2+bx+1$ 能被 x^2-2x+1 整除, 求这个多项式;

(3) 已知 $f(x)$ 是一个三次多项式, 且

$$f(2)=f(3)=0,\quad f(1)=6,\quad f(4)=18,$$

求这个多项式.

20. 解下列方程:

(1) $x^4+4x^3-3x^2-10x+8=0$;

(2) $x^4+2x^3-17x^2-18x+72=0$;

(3) $2x^5+5x^4-13x^3-13x^2+5x+2=0$;

(4) $x^5-11x^4+36x^3-36x^2+11x-1=0$.

21. (1) 已知方程

$$x^4-2x^3-22x^2+62x-15=0$$

有一个根是 $2+\sqrt{3}$, 求其余各根;

(2) 已知方程

$$x^4+(\sqrt{3}+1)x^3-(\sqrt{3}+1)x^2+(\sqrt{3}+1)x-(2+\sqrt{3})=0$$

有一个根是 $-(2+\sqrt{3})$, 求其余各根.

*22. (1) 已知方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 的三个根成等比数列, 求证

$$a^3c=b^3;$$

(2) 已知方程 $x^3-5x^2+tx+s=0$ 有一个根是 $2-3i$, 求证 $t+s=4$;

(3) 已知方程 $4x^2-5x+k=0$ 的两个根是直角三角形的两个锐角的正弦, 求 k 的值.

[提示: 设一个根是 $\sin\alpha$, 那末另一个根是 $\sin(90^\circ-\alpha)$.]

23. 解下列不等式:

(1) $\begin{vmatrix} 3x-3 & 2 \\ x & 1 \end{vmatrix} > 0$;　　(2) $\begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} < 14$.

24. 不展开行列式，证明

$$\begin{vmatrix} mb_1+nc_1 & b_1 & c_1 \\ mb_2+nc_2 & b_2 & c_2 \\ mb_3+nc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

25. 已知 ω 是方程 $x^3-1=0$ 的一个虚根，计算下行列式的值:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega^2 & 1 & \omega \\ \omega & \omega^2 & 1 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}$;　　(4) $\begin{vmatrix} \omega & 2 & 5 \\ \omega^2 & 3 & 6 \\ \omega^3 & 4 & 7 \end{vmatrix}$.

26. 已知 $e=\cos\dfrac{2}{5}\pi+i\sin\dfrac{2}{5}\pi$.

(1) 求证 e 是方程 $x^5-1=0$ 的一个虚根;

(2) 求证方程 $x^5-1=0$ 的 5 个根可以分别用 e, e^2, e^3, e^4, e^5 来表示;

(3) 求证 $e+e^2+e^3+e^4+e^5=0$.

习 题 答 案

第 一 章

习题1·1 1. 25, 20; 2. 15.

习题1·2 1. (2) 60, (3) 120, (4) 120; 2. (1) 16, 12, (2) 64, 24, (3) 256, 24; 3. (1) 504, (2) 729.

习题1·3(1) 1. (1) 120, (2) 5040, (3) 5, (4) 3; 2. (1) $11\frac{2}{3}$, (2) $\frac{49}{792}$, (3) 4, (4) $2\frac{1}{2}$.

习题1·3(2) 1. (1) 120, (2) 360; 2. 60; 3. 720; 4. 20.

习题1·4 1. (1) 1, (2) 210; 3. 120.

习题1·5(1) 1. 325; 2. (1) 24, (2) 96, (3) 48; 3. (1) 48, (2) 672, (3) 240, (4) 480; 4. 30, 15, 15.

习题1·5(2) 1. (1) 100, (2) 36, (3) 52, (4) 48; 2. (1) 48, (2) 360.

习题1·6 1. 2401; 2. 810000; 3. 900, 648, 9, 243; 4. (1) 60, (2) 243.

习题1·7 1. (1) 10, (2) 60; 3. (1) 20, 10, (2) 10, 20.

习题1·8(1) 3. (1) 8, (2) 7; 4. (1) 28, (2) 56; 5. (1) 120, (2) 210.

习题1·8(2) 1. (1) 4, (2) 4, (3) 12, (4) 16, (5) 16; 2. (1) 10, (2) 26, (3) 20, (4) 16; 4. 116; 5. (1) 217, (2) 494.

习题1·9 1. (1) 999, (2) 198; 2. (1) 2, (2) 4.

习题1·10 1. (1) 60, (2) 360, (3) 90; 2. (1) 60, (2) 15, (3) 15; 3. (1) 2520, (2) 576, (3) 216.

习题1·11(1)　1. (1) $\frac{95}{990}$, (2) $\frac{97}{990}$; 2. (1) $\frac{8}{25}$, (2) $\frac{17}{25}$; 3. (1) $\frac{1}{216}$, (2) $\frac{29}{216}$; 4. (1) $\frac{188}{295}$, (2) $\frac{96}{295}$.

习题1·11(2)　1. (1) $\frac{3}{4}$, (2) $\frac{1}{16}$, (3) $\frac{3}{16}$, (4) $\frac{7}{16}$; 2. $\approx 97.0\%$; 3. (1) $\approx 13.5\%$, (2) $\approx 99.3\%$; 4. (1) $\frac{32}{243}$, (2) $\frac{11}{243}$.

复习题一

2. (1) 4, (2) 46, (3) 56; 3. (1) 1630, (2) 288, (3) 21, (4) 479; 4. (1) 10080, (2) 30240, (3) 1152; 5. (1) 360, (2) 3888; 6. (1) $\frac{64}{125}$, (2) $\frac{48}{125}$, (3) $\frac{112}{125}$.

第二章

习题2·1　1. (2) $a_n=\frac{n+2}{2n}$; 2. (1) $a_n=n^2$, (2) $a_n=n^2+\frac{1}{n+1}$.

习题2·3　2. (2) $n=1$, $n\geqslant 10$.

复习题二

3. $n\geqslant 3$.

第三章

习题3·1　3. (1) -560, (2) 160.

习题3·3(1)　1. (1) $T_4=220a^9b\sqrt{b}$, $T_9=495a^4b^4$, (2) $103680x^8y^2$, $1180980x^2y^8$; 2. (1) $C_{12}^6a^6x^6$, (2) $\frac{35}{2}x$, $\frac{70}{x}$.

习题3·3(2)　1. (1) $C_{19}^8x^{11}a^8$, (2) $C_{19}^{11}x^8a^{11}$; 2. (1) $T_7=C_{15}^6=5005$, (2) 没有; 3. 252; 4. $n=8$.

习题3·4　1. (1) $C_{10}^5a^5b^5$, (2) $C_{17}^8x^8$, $C_{17}^9x^9$; 4. $C_{16}^8a^8b^8$.

习题 3·5　2. (1) $90\sqrt[8]{2}$, (2) $-C_{10}^{5}x^{7}\sqrt{x}$; 3. $10x^{6}$, $-10x^{9}$.

习题 3·6　1. 127; 2. 511.

习题 3·7　1. 1.12; 2. 0.984; 3. 0.99; 4. 1.009; 5. 1.03; 6. 0.9964; 7. 731.921; 8. 1.030; 9. 3128; 10. 255.5.

复 习 题 三

4. 3003; 5. -84; 6. (1) $1+2x-26x^{2}$, (2) $135x^{4}$, (3) -168, (4) -51; 8. (1) 2^{n}, (2) $2^{n(n+1)/2}$; 10. 1; 11. (1) 1.26, (2) 31.84.

第 四 章

习题 4·2(1)　1. $1, i, -i, i$; 2. (1) $-1+i$, (2) -1, (3) k 为奇数时: i, 偶数时: 1.

习题 4·2(2)　2. (1) $-\sqrt{2}+i$, (2) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$, (3) 3, (4) $1-i$; 4. (3) 0, (4) $(2\sqrt{2}-10)i$; 5. (1) $\pm 5i$, (2) $\pm\dfrac{3}{2}i$, (3) ± 2, $\pm 2i$, (4) ± 2, $\pm\sqrt{5}i$.

习题 4·3　4. (1) $x=\dfrac{4}{3}$, $y=-\dfrac{5}{4}$, (2) $x=4, y=3$, (3) $x=-8$, $y=3$ 或 $x=3, y=-8$, (4) $x=1, y=3$ 或 $x=-1, y=-3$; 5. (1) $m=-1, m=6$, (2) $m=4$, (3) $m=-1$.

习题 4·4(1)　3. (2) 2, (4) 是; 4. 以原点为中心, 1 和 2 为半径的两个同心圆所构成的圆环(边界在内).

习题 4·4(2)　1. (1) 0, (2) π, (3) $\dfrac{\pi}{2}$, (4) $\dfrac{3}{2}\pi$; 2. (1) $\dfrac{\pi}{3}$, (2) $\dfrac{5}{3}\pi$, (3) $\dfrac{2}{3}\pi$, (4) $\dfrac{4}{3}\pi$; 3. (1) $212°20'$, (2) $67°23'$.

习题 4·4(3)　1. (1) $5(\cos 36°52'+i\sin 36°52')$, (2) $13(\cos 247°23'+i\sin 247°23')$, (3) $6(\cos 330°+i\sin 330°)$, (4) $5\sqrt{2}(\cos 135°+i\sin 135°)$, (5) $5(\cos\pi+i\sin\pi)$, (6) $13(\cos 0+i\sin 0)$, (7) $6\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$,

(8) $4\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi\right)$; 2. (1) $2+2\sqrt{3}i$, (2) -4, (3) $-4i$, (4) $2\sqrt{3}-2i$; 3. $r[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]$ 或 $r[\cos(2\pi-\theta)+i\sin(2\pi-\theta)]$; 4. (1) 2, $\frac{11}{6}\pi$, (2) 3, $\frac{5}{4}\pi$, (3) $\sqrt{3}$, 15°, (4) 1, $\frac{4}{3}\pi$.

习题 4·5(1) 1. (1) $\frac{7}{6}-\frac{5}{12}i$, (2) $-2\sqrt{2}i$, (3) $2b+2ai$, (4) $(y-x)+5(y-x)i$, (5) $2i$; 2. (1) $-\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}i$, (2) $2+2\sqrt{3}i$; 3. (1) $x=4, y=2$, (2) $x=-1, y=-2$, (3) $x=\frac{9}{2}$, $y=18$; 5. (1) $z=2+3i$, (2) $z=\frac{3}{2}-2i$.

习题 4·5(2) 2. (2) $3+i$, (3) $\sqrt{10}$, (4) $\sqrt{2}$; 3. $\frac{2}{3}\sqrt{3}+i$; 4. 60.83 公斤.

习题 4·6(1) 1. (1) $18+15i$, (2) $6-17i$, (3) $0.11-0.07i$, (4) 1; 2. (1) $(a^2+b)^2$, (2) $(a-b)+(a-b)i$; 3. (2) (i) $(x+2i)(x-2i)$, (ii) $(x+a)(x-a)(x+ai)(x-ai)$, (iv) $\left(x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$; 4. (1) 6, -4, (2) 1, 11.

习题 4·6(2) 1. (1) $\sqrt{3}+\sqrt{3}i$, (2) 16, (3) $\sqrt{2}(\cos\theta+i\sin\theta)$, (4) $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$.

习题 4·7 1. (1) $-1+i$, (2) $-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$, (3) $\frac{1}{2}$, (4) $\cos(-75°)+i\sin(-75°)$, (5) $-\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}i$; 2. (1) $\frac{1}{2}$, (2) $\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i$; 3. (1) $z=6+2i$, (2) $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; 4. $u=1+i$, $v=2-i$; 5. 1.

习题 4·8(1) 1. (1) $-119-120i$, (2) $-117+44i$, (3) $\frac{1}{8}i$, (4) $2+2\sqrt{3}i$; 2. (1) 82, (2) $\frac{1}{318}(44-5i)$; 3. (1) -1, (2) $-i$.

习题 4·8(2) 1. (1) $243i$, (2) $729i$, (3) 4096, (4) 1;
2. (1) 2, (2) -16, (3) 0, (4) -64.

习题 4·8(3) 2. $n=6$, -1; 3. $n=4$; 4. $n=4$;
6. $\cos n\theta=\cos^n\theta-C_n^2\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta+C_n^4\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta-\cdots$, 最后一项, 当 n 为偶数时为 $(-1)^{\frac{n}{2}}\sin^n\theta$, 奇数时为 $(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot n\cos\theta\sin^{n-1}\theta$;
$\sin n\theta=C_n^1\cos^{n-1}\theta\sin\theta-C_n^3\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta+C_n^5\cos^{n-5}\theta\sin^5\theta-\cdots$, 最后一项, 当 n 为偶数时为 $(-1)^{\frac{n-2}{2}}n\cos\theta\sin^{n-1}\theta$, 奇数时为 $(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin^n\theta$.

习题 4·9(1) 1. (1) $2\left[\cos\frac{3k+1}{6}\pi+i\sin\frac{3k+1}{6}\pi\right](k=0, 1, 2, 3)$,
(2) $\sqrt{2}[\cos(6k-1)10°+i(6k-1)10°]$ $(k=0, 1, 2, 3, 4, 5)$;
2. (1) $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$,
(2) $\sqrt[4]{2}\left[\cos\frac{k360°+315°}{4}+i\sin\frac{k360°+315°}{4}\right]$ $(k=0, 1, 2, 3)$,
(3) $\sqrt[6]{2}[\cos(3k+1)20°+i\sin(3k+1)20°]$ $(k=0, 1, 2, 3, 4, 5)$,
(4) $\sqrt[10]{18}\left[\cos\frac{k360°+135°}{5}+i\sin\frac{k360°+135°}{5}\right](k=0, 1, 2, 3, 4)$;
3. (1) -1, $\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$, (2) $2(1\pm i)$, $2(-1\pm i)$; 4. (1) $-a$, $-a\omega$, $-a\omega^2$, (2) a, $a\omega$, $a\omega^2$, (3) $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)a$,
(4) $\pm a$, $\pm ai$.

复 习 题 四

1. (1) 0, (2) 0; 5. (1) $x=2, y=1$, (2) $x=4, y=3$,
(3) $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $(2, -2)$, $(2, 1)$, (4) $x=-1$, $y=5$;
6. (1) $64(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)$, (2) $8\left(\cos\frac{13}{12}\pi+i\sin\frac{13}{12}\pi\right)$; 7. (1) 0,
(2) 1; 8. (1) x^4+2x^2+9, (2) x^4-2x^2+9; 11. (1) $\pm(1+2i)$,
(2) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{15}+i)$, (3) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{11}-i)$, (4) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\sqrt{15}i)$;
12. (1) $\frac{147}{229}+\frac{72}{229}i$, (2) $\frac{147}{229}-\frac{72}{229}i$; 13. (1) $z^2-z+1=0$,

(2) $2z^2-2z+5=0$; 16. $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$, $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$, $\begin{cases}x=\omega\\y=\omega^2\end{cases}$, $\begin{cases}x=\omega^2\\y=\omega\end{cases}$.

17. (1) $z=\frac{3}{4}+i$, (2) $z=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

第 五 章

习题 5·1(1) 1. (1) 44, (2) 45, (3) 8, (4) $2\frac{3}{8}$;

2. (1) -11, (2) -8; 3. $a=4$, $b=5$.

习题 5·1(3) 1. (1) $(x-1)\left(x+\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)$,

(2) $(x+1)\left(x-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)$,

(3) $(x+1+i)(x+1-i)(x-1+i)(x-1-i)$,

(4) $\left(x-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x+\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)$;

2. (1) $x^4-15x^2-10x+24$, (2) $36x^4-13x^2+1$;

3. (1) $x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}$, (2) $x^3-(1+i)x^2-x+(1+i)$.

习题 5·1(4) 1. $p=-2$, $q=-5$, $r=6$; 2. $a=-50$, $b=-10$, 商是 $x+5$; 3. (1) $\pm(3x^2-2x-3)$, (2) $\pm(2x^2-3x+5)$;

4. $(x-1)^3(x+3)^3$.

习题 5·2(1) 1. (1) 商 $3x^3+x^2-2x-1$, 余 -4,

(2) 商 $2x^4-2x^3+4x^2-3x+2$, 余 -23, (3) 商 x^2+3x+2, 余 0,

(4) 商 x^3-x^2+x-1, 余 0; 2. (1) -5639, (2) 1741;

3. (1) $1\frac{8}{9}$, (2) $12\frac{4}{9}$.

习题 5·2(2) 1. (1) 商 x^2+4, 余 0, (2) 商 x^3+x^2+x+2, 余 -3;

2. (2) $(2x-3)(3x+4)(x+i)(x-i)$; 3. $k=-9$, $(2x+3)(x-1)(x+3)$.

习题 5·3(1) 2. (2) 2; 3. $\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$; 4. (1) 4,

(2) 2, 2, 2, $-\frac{1}{2}$.

习题 5·3(2) 1. 2, 2, $-\frac{3}{2}$; 2. $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$;

3. $1\pm\sqrt{2}i, 1\pm\sqrt{2}i$; 4. $1, 1+i, 2i$; 5. $k=-2$, 根是 $-2, -2\pm\sqrt{5}$.

习题5·3(3) 1. (1) $-\frac{3}{5}$, (2) 3, (3) 0, (4) $\frac{9}{4}$;

2. (1) $y^3-py^2+qy-r=0$, (2) $ry^3+qy^2+py+1=0$,

(3) $y^3+kpy^2+k^2qy+k^3r=0$, (4) $ry^3-qy^2+py-1=0$;

3. (1) $2y^3+15y^2+37y+31=0$, (2) $31y^3+37y^2+15y+2=0$.

习题5·4 1. (1) $2\pm\sqrt{7}i, -\frac{8}{3}$, (2) $1\pm\sqrt{3}i, 1+\sqrt{3}$;

2. (1) $(x+2)(x-2+i)(x-2-i)=0$, 即 $x^3-2x^2-3x+10=0$,

(2) $(x-2+i)(x-2-i)(x+1+i)(x+1-i)=0$,

(3) $x(x+i)(x-i)(x-1+\sqrt{2}i)(x-1-\sqrt{2}i)=0$,

(4) $(x+1-\sqrt{3}i)(x+1+\sqrt{3}i)(x-1+\sqrt{3}i)(x-1-\sqrt{3}i)=0$;

3. (1) $x^3+x^2+x-3=0$, (2) $1, -1-\sqrt{2}i$; 4. $1\pm i, 1\pm2i$.

习题5·5(1) 1. (1) $-2, 3, 4$, (2) $-1, 2, -\frac{1}{2}$,

(3) $2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$, (4) $3, 3, -\frac{1}{2}, \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$;

4. (1) $-1, -1, -1, \frac{1\pm\sqrt{7}i}{2}$, (2) $1, -3, \frac{-3\pm\sqrt{11}i}{2}$,

(3) $-1, \frac{3}{2}, 1\pm i$, (4) $\frac{1}{2}, \pm\sqrt[4]{2}, \pm\sqrt[4]{2}i$;

5. (1) $(x+3)(x+4)(x-4)$, (2) $(x+3)(2x-1)(3x^2+2x-4)$.

习题5·5(2) 1. (1) $1\pm\sqrt{2}, 2$, (2) $\sqrt{2}\pm1, 2$;

2. $a=b=1$, 根是 $1, 1\pm\sqrt{2}$; 3. $x^4+2x^3-5x^2+6x+2=0$;

4. $1\pm\sqrt{2}, -1$; 5. $\sqrt{3}\pm\sqrt{2}i, -\sqrt{3}\pm\sqrt{2}i, -1$.

习题5·6(1) 1. (1) $\sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{4k+1}{8}\pi+i\sin\frac{4k+1}{8}\pi\right)(k=0,1,2,3)$,

(3) $\sqrt[10]{8}\left(\cos\frac{8k+7}{20}\pi+i\sin\frac{8k+7}{20}\pi\right)$ $(k=0, 1, 2, 3, 4)$,

(5) $\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{12k+11}{24}\pi+i\sin\frac{12k+11}{24}\pi\right)$ $(k=0, 1, 2, 3)$;

2. (2) $-\frac{3}{2}, \frac{-3\pm3\sqrt{3}i}{4}$, (4) $\frac{5}{2}\sqrt{2}(-1\pm i), \frac{5}{2}\sqrt{2}(1\pm i)$,

(6) $\pm\frac{1}{2}i$, $\frac{-\sqrt{3}\pm i}{4}$, $\frac{\sqrt{3}\pm i}{4}$.

习题5·6(2)　1. (1) $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{2}\left(\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}\right)$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{3}\left(\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}\right)$, (2) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}i$, $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$,

(3) $\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{8k+1}{12}\pi+i\sin\frac{8k+1}{12}\pi\right)$ $(k=0, 1, 2)$,

$\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{8k+7}{12}\pi+i\sin\frac{8k+7}{12}\pi\right)$ $(k=0, 1, 2)$,

(4) ±1, $\pm i$, $\frac{\sqrt{6}\pm\sqrt{6}i}{2}$, $\frac{-\sqrt{6}\pm\sqrt{6}i}{2}$;

2. (1) 0, 0, 0, 0, $\sqrt[4]{6}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$, $\sqrt[4]{6}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $\sqrt[4]{5}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$, $\sqrt[5]{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$, (2) $\pm i$, $\pm\sqrt{5}i$, $1\pm2i$, $-1\pm2i$.

习题5·6(3)　1. $\pm i$, $\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$; 2. $-2\pm\sqrt{3}$, $\frac{1\pm\sqrt{15}i}{4}$;

3. $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, $\frac{-1\pm2\sqrt{2}i}{3}$; 4. -1, 2, $\frac{1}{2}$, $-2\pm\sqrt{3}$;

5. -1, $\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$, $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$; 6. 2, $\frac{1}{2}$, $\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$, $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

习题5·6(4)　1. 1, $\pm i$, $\frac{-3\pm\sqrt{7}i}{4}$;

2. 1, $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, $\frac{-1\pm2\sqrt{2}i}{3}$; 3. ±1, 2, $\frac{1}{2}$, -3, $-\frac{1}{3}$.

习题5·6(5)　1. 2, 2, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$; 2. $1\pm\sqrt{2}$, $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$;

3. $-1\pm\sqrt{2}$, -2, $\frac{1}{2}$; 4. $-1\pm\sqrt{2}$, $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, -2, $\frac{1}{2}$.

复习题五

1. (1) 商x^2-x+2, 余-12, (2) 商x^3+2x-3, 余20; 2. (1) -3,

(2) -7693;　3 (1) $a=-52, b=-15$,　(2) $a=24, b=2$,
(3) $a=3, b=-4$,　(4) $a=2, b=3, c=3$;　4. (1) $-x$;
6. (1) $k=25$, 根是 $-3, -3\pm\sqrt{2}$,　(2) $k=\pm 6$, 根是 $\pm 1, \pm 2, \mp 3$;
(3) $k=-92$, 根是 $1, 2, 4, 6$;　7. (2) $2\pm\sqrt{3}$, $\frac{5\pm\sqrt{7}i}{4}$;
8. (1) -6,　(2) -13;　9. (1) $y^3-6y^2+8y-8=0$,
(2) $y^3+2y^2+5y-1=0$;　10. (1) $\pm i, -2\pm i$,　(2) $-i$, $\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$;
11. (1) $2\pm\sqrt{3}$, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{3}{2}$,　(2) $\sqrt{3}$, $2\pm i$;
12. (1) $(x-2-3i)(x-\sqrt{2})(x+3)=0$,
(2) $(x-2-3i)(x-2+3i)(x-\sqrt{2})(x+3)=0$,
(3) $(x-2-3i)(x-2+3i)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x+3)=0$;
13. (1) $1, \pm\frac{5}{2}$,　(2) $-3, \frac{1}{2}$,　(3) $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}$,　(4) 没有有理根;
14. (1) $x^2(x-2)(x+3)(x^2+x+1)$,
(2) $x^2(x-2)(x+3)\left(x-\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)$;
16. (1) -1, $\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$, 2, $-1\pm\sqrt{3}i$,
(2) $\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}i, \pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{3}i$,　(3) $1, \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}, \frac{7\pm 3\sqrt{5}}{2}$,
(4) $\sqrt[3]{i}$, $\sqrt[3]{2+2i}$.

第 六 章

习题6·1(1)　1. (1) 17,　(2) $-\frac{1}{3}$,　(3) 1,　(4) $-2b^4$;
3. (1) $x=1, y=-2$,　(2) $-3, 1$,　(3) $a+b, a-b$,　(4) a, b.
习题6·1(2)　1. (1) 有唯一解,　(2) 有无限多组解,　(3) 无解,
(4) 有唯一解;　2. (1) $k\neq\pm 1$ 时, $x=\frac{k}{k+1}$, $y=\frac{2k+1}{k+1}$, $k=1$ 时, 有无限多组解, $k=-1$ 时, 无解,　(2) $k=0$ 或 $k=1$ 时, 有无穷多组解, $k\neq 0$ 或 $k\neq 1$ 时, 有唯一解 $x=k+1, y=k-1$.
习题6·2(1)　1. (1) 18,　(2) 74;

2. (1) $a^3+b^3+c^3-3abc$, (2) $2xyz$.

习题 6·2(2) 2. (1) 0, (2) $1\frac{19}{108}$; 4. (1) 16, (2) 36.

习题 6·3 2. (1) -94, (2) 5; 3. (1) 27, (2) 92;

4. (1) -2000, (2) $1\frac{1}{12}$.

习题 6·4(1) 1. (1) $x=1, y=2, z=3$, (2) $x=1\frac{6}{7}, y=1, z=\frac{5}{7}$,

(3) $x=1, y=3, z=5$, (4) $x=\frac{a+b}{2}, y=\frac{b+c}{2}, z=\frac{c+a}{2}$;

2. (1) 无穷多组解, (2) 无解, (3) 无解, (4) 无解,

(5) 无穷多组解, (6) 无穷多组解.

习题 6·4(2) 1. (1) $x=k, y=0, z=-k$, (2) $x=0, y=2k, z=k$,

(3) $x=0, y=k, z=2k$, (4) $x=k, y=-k, z=k$.

复 习 题 六

1. (3) $x=1, y=1, z=1$; (4) $x=-5, y=5, z=15$;

2. (1) 无解, (2) 无穷多组解, (3) 无解, (4) 无穷多组解,

(5) 无解, (6) 无解, (7) 无穷多组解, (8) 无穷多组解;

3. (1) 44, (2) 8, (3) 27, (4) $a(a-b)(b-c)$, (5) 0,

(6) $a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)$; 4. (1) $4abc$, (2) 0, (3) $8abc$;

6. (1) $x=2, x=-3$, (2) 2, (3) $x=4$; 7. (1) $x=y=z=0$,

(2) $x=k, y=-k, z=-k$, (3) $x=y=z=0$, (4) $x=y=z=0$,

(5) $x=k(a+b+c), y=-k, z=-k$, (6) $x=-2k, y=-2k, z=k$;

8. $k=0$, $-3\pm2\sqrt{21}$.

总 复 习 题

1. (2) 90, 45; 2. (2) 1, (3) 4, (4) 没有; 3. (1) 1 或 4, (2) 4,

(3) 6; 4. (1) $x=15, y=5$, (2) $m=34, n=14$; 6. (1) 42,

(2) $\frac{1}{7}$; 7. (1) 100000, (2) 0.00001, (3) 50000, 50000,

(4) 0.01008; 8. (1) 280, (2) 560; 9. (1) 1960, (2) 3115,

(3) 3850, (4) 2940, (5) 1058400; 10. (1) 7, (2) 25, (3) 10;

12. $n=8, x=4, y=\frac{1}{2}$;

15. (1) $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$, $\begin{cases}x=1\\y=\frac{1}{3}\end{cases}$, (2) 无解, (3) $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$, $\begin{cases}x=\frac{3}{2}\\y=\frac{3}{4}\end{cases}$, (4) $\begin{cases}x=\frac{3}{2}\\y=\frac{3}{4}\end{cases}$;

16. (1) $\begin{cases}x=\frac{1}{3}\\y=0\end{cases}$, (2) $\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$, $\begin{cases}x=-1\\y=-3\end{cases}$, $\begin{cases}x=\frac{3}{4}\\y=4\end{cases}$, $\begin{cases}x=-\frac{3}{4}\\y=-4\end{cases}$;

17. (1) $\frac{3}{2}-2i$, (2) $\begin{cases}u=\frac{-1+7i}{5}\\v=\frac{-1-7i}{5}\end{cases}$, $\begin{cases}u=1-i\\v=1+i\end{cases}$;

19. (1) $2x^3-3x^2-11x+6$, (2) $x^4-\frac{3}{2}x^3+x^2-\frac{3}{2}x+1$, (3) $2x^3-9x^2+7x+6$; 20. (1) $1, 1, -2, -4$, (2) $2, 3, -3, -4$; (3) $-1, 2, \frac{1}{2}, -2\pm\sqrt{3}$, (4) $1, 2\pm\sqrt{3}, 3\pm2\sqrt{2}$; 21. (1) $3, -5, 2-\sqrt{3}$, (2) $1, \pm i$; 22. (3) $\frac{9}{8}$; 23. (1) $x>3$, (2) $-1<x<7$; 25. (1) 0, (2) 0, (3) 9ω, (4) $9\omega^2$.